



## Plasticitetsteori for jord som Coulomb materiale

Jantzen, Thomas

*Publication date:*  
2007

*Document Version*  
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link back to DTU Orbit](#)

*Citation (APA):*  
Jantzen, T. (2007). *Plasticitetsteori for jord som Coulomb materiale*.

---

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Thomas Jantzen

# *Plasticitetsteori for jord som Coulomb materiale*

Ph.D. Afhandling

---

---

Marts 2007

DTU Byg  
Institut for Byggeri og Anlæg

---

**BYG•DTU, Danmarks Tekniske Universitet**  
**Department of Civil Engineering, Technical University of Denmark**

# **Plasticitetsteori for jord som Coulomb materiale**

**Ph.D. Afhandling**

**Thomas Jantzen**

**Marts 2007**

**Report no. R-174**  
**ISSN 1601-2917**  
**ISBN 9788778772497**



# Plasticitetsteori for jord som Coulomb materiale

Ph.D. afhandling

Thomas Jantzen

BYG•DTU - Department of Civil Engineering

Technical University of Denmark

Marts, 2007

Plasticitetsteori for jord som Coulomb materiale  
Copyright ©, Thomas Jantzen, 2007  
Department of Civil Engineering  
Building 118  
Technical University of Denmark  
2800 Lyngby  
Denmark  
ISSN 1601-2917  
ISBN 9788778772497

# Forord

Denne rapport er udarbejdet på BYG•DTU som et led i de betingelser, der skal opfyldes for at opnå Ph.D.-graden.

Rapporten omhandler plasticitetsteori for Coulomb materialer. Nærmere betegnet jordtryk på vægge og støttemure i brudtilstand.

Projektet er finansieret af Danmarks Tekniske Universitet og udført under vejledning af Professor, dr. techn. Mogens Peter Nielsen. Desuden har der til projektet været tilknyttet lic. techn. Bent Feddersen, Rambøll og civilingeniør Jens Kammer Mortensen, Rambøll som medvejledere. Jeg vil gerne takke disse personer for deres hjælp til projektet.

Jeg vil også gerne takke mine medstuderende igennem studiet, Linh Cao Hoang, Lars German Hagsten, Morten Bo Christiansen og Jakob Laugesen.

Lyngby, Marts 2007

---

Thomas Jantzen





# Symbolliste

$a$	: Adhæsion
$A_c, A_p, A_Q$	: Arbejde
$b$	: Tykkelse
$c$	: Kohæsion
$p$	: Overfladelast
$p^*$	: Hovedspænding ved overflade
$q, q_c, q_p$	: Jordtryk, hhv. totalt, kohæsiionsbidrag, overfladelastbidrag
$q^*$	: Hovedspænding ved væg
$Q$	: Jordtryksreaktion
$r_0$	: Støttemurshøjde
$R$	: Radius for Mohr's cirkel
$u, u_\theta, u_x, u_y, u_\theta, u_r$	: Flytninger
$V$	: Volumen
$W$	: Dissipation
$W_v$	: Dissipation pr. volumenenhed
$W_l$	: Dissipation pr. længdeenhed
$x, y, n, t$	: Rektangulære koordinater
$\alpha, \beta$	: Vinkler
$\alpha, \alpha_c, \alpha_p$	: Momentarme
$\delta$	: Flytningsvektor
$\delta, \delta_2$	: Vægfriktionsvinkel
$\delta_1$	: Vinkel for overfladelast
$\delta^*, \delta_1^*, \delta_2^*$	: Vinkler
$\varepsilon, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_\theta, \varepsilon_r$	: Normaltøjninger
$\varepsilon_m$	: Middeltøjning
$\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{\theta r}, \varepsilon_{r\theta}$	: Tværtøjninger
$\gamma, \gamma_{xy}$	: Vinkelændringer
$\varphi$	: Friktionsvinkel
$\mu$	: Friktionskoefficient
$\theta, r$	: Polære koordinater
$\sigma, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_\theta, \sigma_r$	
$\sigma_n, \sigma_t$	: Normalspændinger
$\sigma_1, \sigma_2$	: Hovedspændinger
$\sigma_m$	: Middelspænding
$\tau, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}, \tau_{nt}$	: Forskydningsspændinger
$\tau_q$	: Forskydningsspænding på væg
$\omega$	: Rotation



# Resume

I denne afhandling udvikles teorier for jordtryk på støttemurskonstruktioner.

Teorierne er baseret på plasticitetsteoriens øvre- og nedreværdiløsninger. Som flydebetingelse for jord benyttes Coulombs flydebetingelse.

Én løsning er baseret på en eller flere diskontinuitetslinier i jordens spændingsfelt. Teorien giver et bud på beregning af jordtrykket på en støttemurskonstruktion med vilkårlig hældning og med vilkårlig adhæsion og friktion mellem mur og jord. I tilfældet uden bidrag fra jordens egenvægt kan overfladen og overfladelasten endvidere have en vilkårlig hældning.

En anden teori er baseret på at jorden ikke er udnyttet fuldt ud til flydning. Denne løsning kan derfor ikke være en eksakt løsning. Løsningen er dog stadig en nedreværdiløsning, og er derfor tilladelig. Løsningen er udviklet til at beregne jordtryksbidraget på muren fra jordens egenvægt.

Løsningerne er sammenlignet med en kendt teori, der benytter zonebrud. Teorien er udviklet af Brinch Hansen, og er den mest benyttede jordtryksteori i Danmark.

En sammenligning af teorierne viser, at der er god overensstemmelse for de normalt forekommende væggeometrier.



# Summary

In this thesis, some theories for earth pressure calculations on retaining walls are developed.

The theories are based on the ultimate load carrying capacity, using the upper and lower bound solutions of the plastic theory. For the yield condition the theory suggested by Coulomb is used.

One solution is developed using a line of discontinuity of the stress field in the soil. The theory gives a proposal of how to calculate the earth pressure on retaining walls with any angle for the wall, and any adhesion and friction between the wall and the soil. Finally, for the earth pressure without gravity, any angle of the surface and any angle for the surface load are considered.

A second solution is based on a stress field which does not lead to fully yielding. The solution can consequently not be the ultimate load. The stress field is though still a lower bound solution and therefore admissible. The solution is developed to calculate the earth pressure produced by gravity of the soil.

The solutions are compared with a known theory using zone rupture solutions. The solution is developed by Brinch Hansen, and is the most commonly used theory in Denmark.

By comparing the theories, fairly good agreement within the limits of the commonly used geometry of the walls is found.



# Indholdsfortegnelse

1	INDLEDNING.....	1
1.1	Formål med afhandlingen .....	1
2	PLASTICITETSTEORI.....	3
2.1	Plasticitetsteoriens grundbegreber .....	3
2.2	Definitioner i geoteknikken.....	4
2.3	Nedreværdiløsninger .....	8
2.3.1	Ligevægtsbetingelser .....	8
2.3.2	Transformationsformler .....	11
2.3.3	Flydebetingelsen .....	12
2.3.4	Rankine zonen.....	14
2.3.5	Prandtl zonen.....	15
2.4	Øvreværdiløsninger.....	18
2.4.1	Geometriske betingelser.....	18
2.4.2	Flydelov (normalitetsbetingelse).....	23
2.4.3	Flydelinier i Coulomb materialer .....	25
3	BEMÆRKNINGER OM DEN VIRKELIGE BRUDBETINGELSE .....	27
4	EKSAKTE LØSNINGER UDEN HENSYNTAGEN TIL EGENVÆGT .....	28
4.1	Støttmure i kohæsionsjord.....	32
4.1.1	Glat væg .....	32
4.1.2	Ru væg .....	35
4.1.3	Ru væg, toplade.....	38
4.2	Støttmure i friktions- og kohæsionsjord.....	41
4.2.1	Glat væg .....	41
4.2.2	Ru væg .....	45
4.2.3	Ru væg, toplade.....	48
5	DISKONTINUITETSLINIEN.....	51

6	GLAT STØTTEMUR MED VANDRET JORDOVERFLADE.....	53
6.1	Friktionsjord.....	53
6.2	Kohæsionsjord .....	57
6.3	Friktions- og kohæsionsjord.....	59
7	RU STØTTEMUR MED VANDRET JORDOVERFLADE.....	63
7.1	Friktionsjord.....	64
7.1.1	Jordtryk ved ru væg, $\delta=\varphi$ .....	67
7.2	Kohæsionsjord .....	69
7.2.1	Jordtryk ved ru væg, $a=c$ .....	71
7.3	Friktions- og kohæsionsjord.....	73
7.3.1	Jordtryk for ru væg, $\delta=\varphi$ og $a=c$ .....	76
8	VILKÅRLIG RU STØTTEMUR MED HÆLDENDE JORDOVERFLADE.....	79
8.1	Friktionsjord.....	80
8.1.1	Jordtryk for ru væg, $\delta_2=\varphi$ .....	83
8.2	Kohæsionsjord .....	84
8.2.1	Jordtryk for ru væg, $a=c$ .....	86
8.3	Friktions- og kohæsionsjord.....	87
8.3.1	Jordtryk for ru væg, $\delta_2=\varphi$ og $a=c$ .....	90
9	ANVENDELSE AF FLERE DISKONTINUITETSLINIER .....	91
9.1	Friktionsjord.....	93
9.2	Kohæsionsjord .....	97
9.3	Friktions- og kohæsionsjord.....	101
10	JORDTRYKSLØSNINGER UNDER HENSYN TIL EGENVÆGT .....	107
10.1	Nedreværdiløsninger.....	107
10.1.1	Superposition af jordtryksløsninger .....	107



10.1.2	Ligevægtsbetingelser .....	108
10.1.3	Flydebetingelsen .....	111
10.1.4	Rankine zonen.....	111
10.1.5	Statisk tilladelig hældning for jordoverflade.....	112
10.1.6	Prandtl zonen.....	117
10.2	Øvreværdiløsninger.....	118
11	<b>EKSAKTE LØSNINGER UNDER HENSYN TIL EGENVÆGT .....</b>	<b>119</b>
11.1	Støttmure i kohæsionsjord.....	120
11.1.1	Glat væg .....	120
11.1.2	Ru væg .....	123
11.1.3	Ru væg, topplade.....	126
11.2	Støttmure i friktions- og kohæsionsjord.....	128
11.2.1	Glat væg .....	128
11.2.2	Ru væg .....	132
11.2.3	Ru væg, topplade.....	132
12	<b>ØVREVÆRDILØSNINGER UNDER HENSYNTAGEN TIL EGENVÆGT.....</b>	<b>133</b>
12.1	Ru væg .....	133
12.2	Ru væg, topplade.....	138
13	<b>DISKONTINUITETSLINIELØSNINGER.....</b>	<b>141</b>
14	<b>SUMMATION AF DISKONTINUITETSLINIELØSNINGER.....</b>	<b>145</b>
15	<b>GLAT STØTTEMUR MED VANDRET JORDOVERFLADE.....</b>	<b>147</b>
15.1	Friktionsjord.....	147
15.1.1	Anvendelse af flere diskontinuitetslinier .....	150
15.2	Kohæsionsjord .....	152
15.2.1	Anvendelse af flere diskontinuitetslinier .....	154
15.3	Friktions- og kohæsionsjord.....	156
15.3.1	Anvendelse af flere diskontinuitetslinier .....	156

16	RU STØTTEMUR MED VANDRET JORDOVERFLADE.....	159
16.1	Friktionsjord.....	159
16.1.1	Jordtryk ved ru væg, $\delta=\varphi$ .....	160
16.1.2	Anvendelse af flere diskontinuitetslinier .....	163
16.2	Kohæsionsjord .....	167
16.2.1	Jordtryk ved ru væg, $a=c$ .....	168
16.2.2	Anvendelse af flere diskontinuitetslinier .....	170
16.3	Friktions- og kohæsionsjord.....	172
16.3.1	Jordtryk for ru væg, $\delta=\varphi$ og $a=c$ .....	173
16.3.2	Anvendelse af flere diskontinuitetslinier .....	174
17	SAMMENLIGNING MELLEM LØSNINGER FOR EKSISTERENDE TEORI OG DISKONTINUITETSLINIETEORIEN.....	177
18	NEDREVÆRDILØSNINGER SOM IKKE OPFYLDER FLYDEBETINGELSEN OVERALT .....	197
18.1	Vandret jordoverflade, ru væg i friktionsjord .....	197
18.2	Vandret jordoverflade, glat væg i friktionsjord.....	204
19	KONKLUSION .....	207
20	LITTERATURLISTE .....	209

# 1 Indledning

## 1.1 Formål med afhandlingen

Formålet med den følgende afhandling er at beskrive nogle af de kendte løsninger for jordtryk på vægge o.lign. samt angive nogle nye løsninger.

I geoteknikken findes et meget stort antal teorier for jordtryk. Den første blev allerede udviklet af Coulomb i slutningen af 1700-tallet. Løsningerne er for de flestes vedkommende præget af specielle forudsætninger uden sammenhæng med en generel teoribygning. De løsninger, der angives i denne afhandling, udvikles ud fra den generelle teoribygning, der kaldes plasticitetsteorien. Hovedvægten lægges på at udvikle nye nedreværdiløsninger, se afsnit 2.3.

Den historiske udvikling af plasticitetsteoriens anvendelse indenfor geoteknikken fremgår af W.-F. Chens bog [75,1]. Siden har forskningen i høj grad været rettet mod udvikling af edb-metoder. Der findes f.eks. aktiv forskning i Australien omkring M.F. Randolph og i Frankrig omkring J. Salencon. For en introduktion hertil, se [90,1] og [03,1].

De løsninger som benyttes i dag er baseret på Brinch Hansens teori, se [53,1]. Teorien, med tilhørende gyldighedsinterval, er blevet videre behandlet af Bent Hansen og J.S. Steenfelt. Resultatet heraf kan bl.a. findes i [80,2]. Disse løsninger giver problemer med gyldighedsintervallet. Specielt for en glat støttemur får man at vinklen mellem jordoverfladen og støttemuren skal være større end  $90^\circ$ . I denne afhandling udvikles jordtrykteorien ved anvendelse af diskontinuitetslinier. Disse løsninger har et meget større gyldighedsinterval - til sammenligning kan nævnes, at førnævnte tilfælde med glat støttemur og vandret jordoverflade ikke giver begrænsninger vedr. gyldigheden.



## 2 Plasticitetsteori

I bærende konstruktioner spiller egenvægten for det enkelte konstruktionselement ofte en underordnet rolle og egenvægten kan modelleres på simpel måde, f.eks. som en kontinuert last i en bjælkes systemlinje.

For jord spiller egenvægten en dominerende rolle. Man skulle derfor tro, at løsninger for hvilke egenvægten negligeres, kun har lille interesse. Dette er imidlertid forkert, og det skyldes, at der kan udvikles en superpositionslov, hvor løsninger for vægtløs jord superponeres med løsninger, hvor jordens egenvægt er medtaget.

Superpositionsloven udvikles i kapitel 10.1.1.

### 2.1 Plasticitetsteoriens grundbegreber

Ved plasticitetsteorien forstås her teorien for perfekt-plastiske materialer. Et perfekt-plastisk materiale er defineret ved sin flydebetingelse, der angiver de spændingskombinationer, der kan føre til, at tøjningerne kan vokse uden grænse, uden at spændingerne ændres. Det vedtages, at den funktion, der beskriver flydebetingelsen, antager negative værdier for spændinger, der ikke kan give flydning, værdien nul for spændinger der kan give flydning og værdier større end nul for spændinger uden for flydefladen. Materialet er desuden defineret ved sin flydelov, der angiver forholdet mellem de plastiske deformationer under flydning. Når spændingerne svarer til punkter inden for flydefladen, optræder kun elastiske deformationer og specielt for det stift-plastiske materiale optræder slet ingen deformationer.

I det følgende forudsættes, at flydeloven er givet ved normalitetsbetingelsen (den associerede flydelov). Afbildes flydefladen som funktion af spændingstilstanden, f.eks. karakteriseret ved spændingskomponenterne i et rektangulært koordinatsystem, som en flade i spændingsrummet (evt. en hyperflade) og afbildes de tilhørende plastiske tøjningstilvækster i samme rum, udtrykker normalitetsbetingelsen, at tøjningsvektoren er en udadrettet normal til flydefladen.

Plasticitetsteoretisk bæreevnebestemmelse sker oftest ved anvendelse af de såkaldte ekstremalprincipper. De formuleres lettest ved anvendelse af følgende begreber:

Ved en statisk tilladelig spændingstilstand forstås en spændingstilstand, der opfylder de indre ligevægtsbetingelser og de statiske randbetingelser.

Ved en sikker spændingstilstand forstås en spændingstilstand, der svarer til spændinger inden for eller evt. på flydefladen.

Ved en geometrisk mulig brudfigur forstås en flytningstilstand, der opfylder de geometriske randbetingelser og som svarer til tøjninger, der er geometrisk mulige iht. normalitetsbetingelsen.

Ved dissipationen svarende til en geometrisk mulig brudfigur forstås det indre arbejde spændingerne udfører iht. normalitetsbetingelsen.

Nedreværdisætningen udsiger, at en last, der svarer til en statisk tilladelig sikker spændingstilstand, er mindre end eller lig med bæreevnen. Sætningen kan indlysende nok benyttes til beregning af nedreværdier for bæreevnen.

Øvreværdisætningen udsiger, at en last, der for en geometrisk mulig brudfigur giver større arbejde end dissipationen, ikke kan bæres af konstruktionen.

Hvis arbejdet ydet af den ydre last sættes lig med dissipationen fås arbejdsligningen. For proportionalbelastning, dvs. alle lastkomponenter er proportionale, kan arbejdsligningen benyttes til beregning af øvreværdier for bæreevnen.

Sammenfaldende nedre- og øvreværdier giver en eksakt løsning.

## 2.2 Introduktion til og definitioner i geoteknikken

Der sættes ofte spørgsmålstegn ved gyldigheden af normalitetsbetingelsen for jord. Dette er formodentlig berettiget. For det materiale vi senere vil definere som et rent friktionsmateriale finder man, at hvis normalitetsbetingelsen gælder er det samlede indre arbejde ved brud lig med nul, dvs. der udvikles ingen indre energi i materialet; der er ingen indre dissipation. Dette er i modstrid med, at kornene i jord må formodes at glide på hinanden under udvikling af friktionsvarme. Man finder ligeledes for et friktionsmateriale, at det altid får en volumenudvidelse ved brud hvis normalitetsbetingelsen gælder. Ved målinger finder man ikke altid en sådan volumenudvidelse. Dette kan skyldes, at der indtræffer lokalisering, dvs. at bruddet sker i smale zoner, flydezoner, således at volumenudvidelsen er koncentreret i disse zoner og derfor ikke optræder i prøven som helhed.

Konstitutive ligninger, der ikke forudsætter gyldigheden af normalitetsbetingelsen, er under udvikling. De er i reglen komplicerede og beregninger kan, selv i simple tilfælde, kun udføres vha. edb. En af disse teorier, den såkaldte kritiske tilstands teori (engelsk: critical state theory), går ud fra den antagelse, at en given kornmængde ved endeligt brud altid ender i en og samme tilstand, den kritiske tilstand, f.eks. karakteriseret ved porevolumenet, der er en entydig funktion af middelspændingen. En belastning kan f.eks. karakteriseres ved spændingskomponenternes afvigelse fra middelspændingen (deviationsspændingerne). Der må skelnes mellem brudforsøg hvor porevandet uhindret kan forlade prøven, et såkaldt drænet brud og forsøg, hvor porevandet holdes konstant, et såkaldt udrænet brud. Spændingerne ved et drænet brud måles ved de kræfter, der virker mellemkornene, de såkaldte effektive spændinger. For et udrænet brud måles spændingerne ved de totale spændinger, dvs. summen af kornspændinger og porevandstrykket.

Hvis porevolumenet i udgangssituationen er mindre end svarende til den kritiske tilstand vil belastningen opnå en maksimumsværdi, hvorefter den falder og ender med at være omtrent konstant under voksende deformationer. Denne konstante last svarer til den kritiske tilstand. Bortset fra i starten af forsøget vil volumenet vokse indtil

kritisk tilstand nås, hvorefter det vil være omtrent konstant. Der sker oftest lokalisering.

Hvis porevolumenet er større end svarende til den kritiske tilstand, vil belastningen stige jævnt og volumen vil i begyndelsen aftage, men prøven vil ende i den samme kritiske tilstand som ved forsøget hvor porevolumenet er mindre end svarende til den kritiske tilstand. Der sker sjældent lokalisering. Last-deformationskurven vil altså i begge tilfælde ende med en vandret gren svarende til nærmest perfekt plastisk opførsel.

Maksimal last indtræffer ved tøjninger af størrelsesordenen 1%, mens den kritiske tilstand først nås ved tøjninger af størrelsen 10%.

Brudbetingelsen ved drænet brud svarer til et rent friktionsmateriale. Normalitetsbetingelsen er ikke opfyldt, da deformationerne i den kritiske tilstand sker under volumenkonstans.

For et udrænet forsøg svarer den kritiske tilstand til udgangstilstanden. Ved brud kan den totale middelspænding variere ved at porevandstrykket varierer, mens kornspændingerne ikke varierer. Brudbetingelsen svarer derfor til, hvad vi senere vil definere som et rent kohæsionsmateriale, der ved brud deformeres under volumenkonstans. Normalitetsbetingelsen vil derfor være opfyldt.

Ved hjælp af den kritiske tilstands teori kan man derfor udføre fuldstændigt korrekte beregninger både hvad angår deformationer ved brud og hvad angår spændingstilstanden ved brud vha. teorier for perfekt plastiske materialer, når der drejer sig om udrænet brud. For drænet brud bliver beregningerne ikke korrekte, dog gælder det, at en øvreværdiløsning stadig er en gyldig øvreværdi. Nedreværdier behøver derimod ikke at være korrekte.

En introduktion til den kritiske tilstands teori kan ses i [78.3], [91.2] og [93.1].

Pga. de store beregningsvanskeligheder der fremkommer, når normalitetsbetingelsen ikke gælder, er det endnu ikke almindeligt at tage hensyn til ovenstående forhold i praksis. Der er da også gennem årtier opnået et stort erfaringsmateriale mht. anvendelse af teorier for det perfekt-plastiske materiale, ifølge hvilke man kan konkludere, at problemerne med normalitetsbetingelsens manglende gyldighed ikke spiller nogen større praktisk rolle ved beregning af bærevnen.

Ved benyttelse af plasticitetsteori på jordproblemer anvendes som regel Coulomb's brudbetingelse som flydebetingelsen for jord. Coulomb's brudbetingelse siger at forskydningsbæreevnen, i et snit hvor flydning er opnået, varierer lineært med normalspændingen som snittet er belastet med. Dette udtrykkes vha. to konstanter, friktionsvinklen  $\varphi$  og kohæsionen  $c$ . Se nærmere herom i afsnit 2.3.3.

Generelt må det antages at jord, pga. lagdelinger, varierende kornstørrelser og pakning mv. er et anisotropt og inhomogent materiale. Udvikling af analytiske løsninger, som medtager disse forhold, vil hurtigt vise sig at være særdeles kompliceret selv ved de simpleste eksempler på jordtryksproblemer. I praksis simplificeres problemet ved at antage at jorden er isotrop og homogen, idet der

forudsættes anvendelse af konservative styrkeparametre. I denne afhandling behandles således også kun løsninger for isotrope og homogene materialer uden lagdeling.

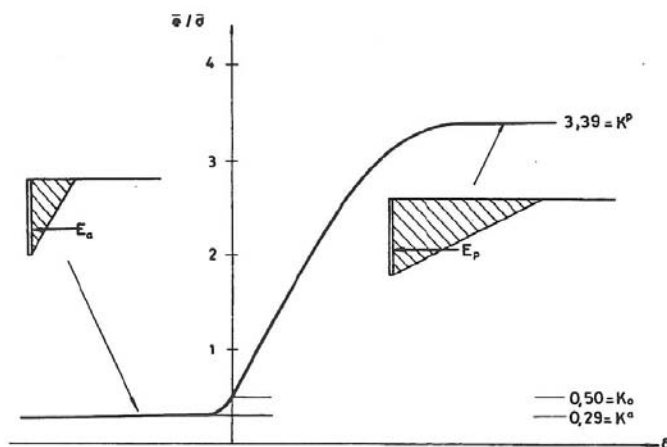
Ved beregning af en støttemur simplificeres problemet endvidere ved at antage plan deformationstilstand, dvs at væggen i teorien er uendelig lang, således at tøjningerne på tværs vil være nul. I Danmark har man tradition for at korrigere friktionsvinklen for plane tilfælde, dvs. at der indføres begreberne den plane friktionsvinkel  $\varphi_{pl}$  og den triaksiale friktionsvinkel  $\varphi_{tr}$ . Den triaksiale friktionsvinkel er som regel den som findes ved laboratorieforsøg. I Danmark regnes den plane friktionsvinkel 10% større end den triaksiale friktionsvinkel.

Da en støttemur kan udføres med forskellige overflade, er det nødvendigt at tage hensyn til overfladens ruhed. Denne vil være defineret ved en vægfriktionsvinkel  $\delta$ , som svarer til jordens friktionsvinkel. Vægoverfladens forskydningsbæreevne i det tilfælde hvor normalspændingen på muren er nul betegnes adhæsionen  $a$ . I denne afhandling forudsættes endvidere at forholdet mellem tangens til jordens friktionsvinkel og tangens til vægfriktionsvinklen og forholdet mellem jordens kohæsion og adhæsion er ens.

Jordtrykket på en støttemur afhænger af om jordtrykket medvirker til eller modvirker et brud. I første tilfælde, hvor jorden medvirker til brud, vil jorden presse støttemuren til brud og der vil dannes det såkaldte aktive jordtryk. I sidste tilfælde hvor jorden modvirker et brud, vil støttemuren blive presset ind i jorden, og der vil blive dannet det såkaldte passive jordtryk.

Nedenstående figur viser et typisk forløb for jordtrykket som funktion af den relative bevægelse  $\delta$  af væggen i forhold til jorden. Det ses at der er betydelig forskel på det aktive jordtryk, betegnet  $E_a$  og det passive jordtryk,  $E_p$ . Grunden til den store forskel mellem trykkene ligger i jordens forskydningsbæreevne. Denne vil altid modvirke bevægelsen i jorden. Dvs. at ved aktivt jordtryk modvirker jorden den bevægelse ind mod muren som bruddet frembringer, herved fås den mindst mulige last på muren, det aktive jordtryk. Omvendt såfremt muren presses ind i jorden, vil jordens forskydningsbæreevne modvirke denne bevægelse og resultere i et maksimalt tryk på muren, det passive jordtryk.





Figur 2.1: Eksempel på jordtryk som funktion af den relative bevægelse  $\delta$  af støttemur.  $\bar{\sigma}$  og  $\bar{\sigma}$  er effektive spændinger, hhv. jordtryk og lodret spænding.  $K_0$ ,  $K^a$  og  $K^p$  er de såkaldte jordtrykskoefficienter for hhv. hviletryk, aktivt tryk og passivt tryk. Figuren er taget fra Bent Hansen, *Geoteknik og fundering*, del 1, [78.1], figur 13A.

Aktive og passive jordtryk kræver relative bevægelser af muren i forhold til jorden. En bevægelse af denne størrelse vil man som regel kun tillade i en brudtilstand. Ved analyser af anvendelsestilstanden benytter man det såkaldte hviletryk, som er defineret som jordtrykket i tilfældet hvor der ikke er nogen relativ bevægelse mellem mur og jord. Anvendelsestilstand og hviletryk på mure er ikke behandlet i denne afhandling. Analysen er dog særdeles relevant for konstruktioner, som kun tillader små deformationer, f. eks uarmerede kældervægge.

Da forskellen mellem det aktive og passive jordtryk ligger i fortegnet for forskydningsspændingerne, viser det sig i de analytiske løsninger, at forskellen mellem de to løsninger kan udtrykkes ved fortegnet for friktionsvinklen og kohæsionen, der som nævnt beskriver forskydningsbæreevnen i jorden.

Når nedreværdisætningen benyttes ved bestemmelse af aktivt jordtryk skal man søge mindste værdi af jordtrykket for at få en så god løsning som muligt. Omvendt ved bestemmelse af passivt jordtryk.

Når øreværdisætningen anvendes til bestemmelse af aktivt jordtryk skal man søge største værdi for at få en så god løsning som muligt. Omvendt ved bestemmelse af passivt jordtryk.

Nedreværdisætningen giver umiddelbart mulighed for bestemmelse af jordtryksfordelinger. Ved øreværdiløsninger kan jordtryksfordelingen kun bestemmes i specielle tilfælde.

Plasticitetsteorien forudsætter ubegrænset flydeevne, en forudsætning der er udmærket opfyldt for mange jordarter.

Bæreevnen bestemt vha. plasticitetsteorien svarer til den største last, der kan findes for en given flydebetingelse. Såfremt normalitetsbetingelsen ikke gælder, fås altså en bæreevne, der er mindre end evt. lig med plasticitetsteoriens bæreevne. En grundig gennemgang af plasticitetsteorien defineret som ovenfor er beskrevet i Mekanik 2.2, del 2 [00.1].

## 2.3 Nedreværdiløsninger

Som nævnt i afsnit 2.1 kræver nedreværdiløsninger at ligevægtsbetingelserne tilfredsstilles. I det følgende angives disse for to simple koordinatsystemer, rektangulære koordinater og polære koordinater.

### 2.3.1 Ligevægtsbetingelser

De indre ligevægtsbetingelser findes ved at udtrykke ligevægten af et infinitesimalt element. Ligninger opskrives her for vægtløs jord, se [91,1].

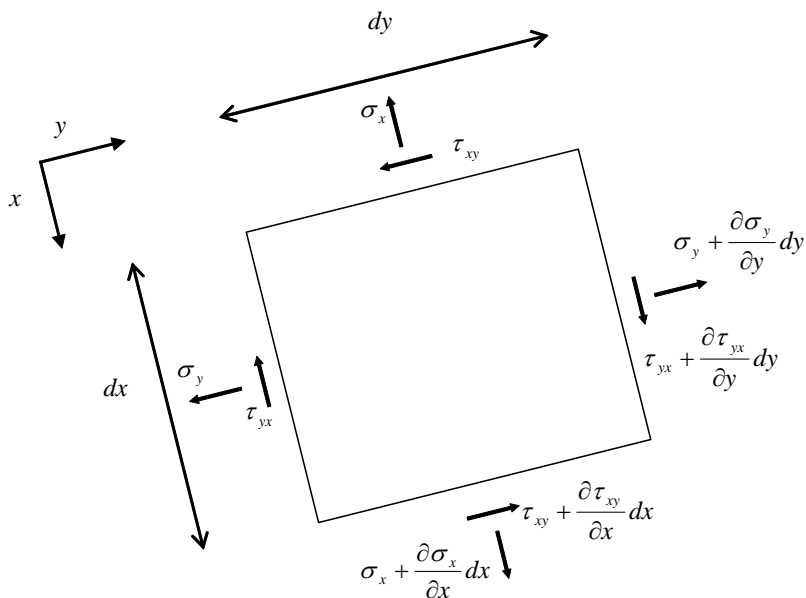
#### 2.3.1.1 Rektangulære koordinater

Det infinitesimale element er her begrænset af et rektangel, som er orienteret efter de to koordinataksler. Størrelsen af rektangleret er givet ved sidelængderne  $dy$  og  $dx$ , som angivet i figur 2.2. Spændingskomponenternes positive retninger svarer til koordinatakslerne i snit med koordinatakslerne som udadgående normaler.

Betegnelserne, som fremgår af figuren, er hhv.  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  og  $\tau_{yx}$ . Fortegnsregningen indebærer, at træknormalspændinger regnes positive. Den ændring, f.eks. af  $\sigma_x$ , der

optræder over afstanden  $dx$ , kan skrives som  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$  plus højere ordens led. Den

resulterende spænding bliver herved  $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ . Tilsvarende betragtninger kan gøres for  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  og  $\tau_{yx}$ .



Figur 2.2: Ligevægtsbetingelser i rektangulære koordinater

Rotationsligevægt om elementets midtpunkt:

$$\tau_{xy} dy \frac{1}{2} dx - \tau_{yx} dx \frac{1}{2} dy + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \frac{1}{2} dx - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \frac{1}{2} dy = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (2.1)$$

Da således  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$  udtrykkes ligevægtsligningerne normalt kun ved en af størrelserne, f.eks.  $\tau_{xy}$ .

Projektion langs x-aksen:

$$-\sigma_x dy + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \tau_{yx} dx + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx = 0$$

Idet (2.1) benyttes fås:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

Projektion langs y-aksen:

$$-\sigma_y dx + \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{xy} dy + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy = 0$$

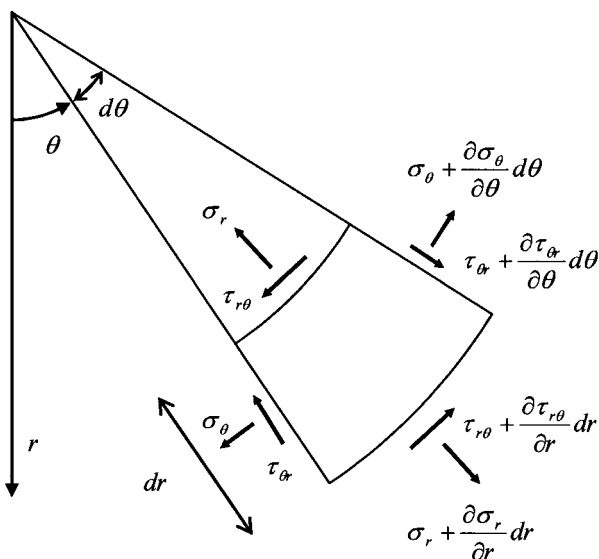
$\Uparrow$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

Ligevægtsligningerne (2.2) og (2.3) udtrykker ligevægtsbetingelserne i rektangulære kooordinater for vægtløs jord.

### 2.3.1.2 Polære koordinater

Ved benyttelse af polære koordinater benyttes et infinitesimalt element, der er begrænset af to cirkelbuer og to rette linier. De rette linier er sammenfaldende med radierne for henholdsvis  $\theta$  og  $\theta + d\theta$ . Cirkelbuerne har en radius på henholdsvis  $r$  og  $r + dr$ . Elementet har herved sidelængderne  $dr$  i den radiære retning, og sidelængderne  $r d\theta$  og  $(r + dr) d\theta$  i  $\theta$ -retningen, se figur 2.3.



Figur 2.3: Ligevægtsbetingelser i polære koordinater

Rotationsligevægt om elementets midtpunkt:

$$\tau_{r\theta} r d\theta \frac{1}{2} dr - \tau_{\theta r} dr \frac{1}{2} r d\theta + \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta \frac{1}{2} dr - \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{1}{2} r d\theta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} \quad (2.4)$$

Ligevægtsbetingelsen udtrykkes normalt ved  $\tau_{r\theta}$ .

Projektion på  $\theta$ -retning:

$$-\sigma_{\theta}dr + \left( \sigma_{\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \tau_{\theta r} r d\theta + \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta + \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr d\theta = 0$$

Idet (2.4) er benyttet fås:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + 2\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} r = 0 \quad (2.5)$$

Radiær projekction:

$$-\sigma_r r d\theta + \left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \tau_{r\theta} dr + \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \sigma_{\theta} dr d\theta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_r - \sigma_{\theta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.6)$$

### 2.3.2 Transformationsformler

I en plan spændingstilstand findes altid to på hinanden vinkelrette snit, hvor forskydningspændingerne er nul. Disse snit kaldes hovedsnit. Normalspændingerne i hovedsnittene kaldes hovedspændinger. I hovedsnittene findes største og mindste normalspænding.

Man har naturligvis ofte brug for spændingerne i andre snit end i snittene hørende til et bestemt koordinatsystem. Formler, der fører en spændingstilstand fra et koordinatsystem til et andet betegnes transformationsformler.

Transformationsformlerne fra et hovedsaksystem til et vilkårligt  $x, y$ -system lyder

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 \cos^2 \nu + \sigma_3 \sin^2 \nu \\ \sigma_y &= \sigma_1 \sin^2 \nu + \sigma_3 \cos^2 \nu \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\nu \end{aligned} \quad (2.7)$$

Her er  $\sigma_1$  og  $\sigma_3$  hovedspændingerne, og  $\nu$  er vinklen mellem snittet med  $\sigma_1$  og et snit vinkelret på  $x$ -aksen, regnet positiv i  $x, y$ -planens positive omløbsretning.

Punkterne  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  og  $(\sigma_y, -\tau_{xy})$  ligger på en cirkel med diameteren er  $\sigma_1 - \sigma_3$ , når  $\nu$  gennemløber intervallet 0 til  $\pi$  eller  $2\pi$ . Her forudsættes, at  $\sigma_1$  er den største hovedspænding. Cirklen kaldes Mohr's cirkel.

Transformationsformler, der ikke forudsætter, at det ene koordinatsystem er et hovedsaksystem, kan f.eks. findes i Mekanik 2.2, del 1 [91.1].

### 2.3.3 Flydebetingelsen

Flydebetingelsen angiver, som nævnt i afsnit 2.1, de spændingskombinationer, der kan føre til flydning, dvs. at de plastiske tøjninger kan vokse ubegrænset uden at spændingerne ændrer sig.

For jordarter benyttes ofte den simplest tænkelige flydebetingelse, Coulombs flydebetingelse. Efter denne sker flydning, når forskydningspændingen i et snit antager en værdi, der er bestemt af en parameter, kohæsionen  $c$ , plus et led der er proportionalt med tryknormalspændingen i snittet. Proportionalitetsfaktoren  $\mu$  betegnes friktionskoefficienten. Flydebetingelsen er derfor  $|\tau| = c - \mu\sigma$ , idet vi, som nævnt tidligere, regner spændinger positive som træknormalspændinger. Vinklen  $\varphi$  defineret ved  $\tan \varphi = \mu$  betegnes friktionsvinklen. Flydebetingelsen kan altså skrives

$$|\tau| = c - \sigma \tan \varphi \quad (2.8)$$

Relationen  $|\tau| = c - \sigma \tan \varphi$  fremstiller i et  $\sigma, \tau$ -koordinatsystem to rette linier, der har hældningen  $\tan \varphi$ , og som afskærer stykkerne  $c$  af  $\tau$ -aksen.

Vha. Mohr's cirkel er det derfor let at afgøre, om en spændingstilstand kan give flydning. Hvis den største Mohr's cirkel tegnet over diameteren  $\sigma_1 - \sigma_3$ , hvor  $\sigma_1$  er største og  $\sigma_3$  er mindste hovedspænding, netop rører flydebetingelsen kan der ske flydning. Hvis Mohr's cirkel ligger inden området begrænset af flydebetingelsen kan der ikke ske flydning. Spændingstilstande svarende til Mohr's cirkler med punkter uden for flydebetingelsen kan ikke forekomme.

I et punkt vil der altid være to snit, i hvilke spændingerne tilfredsstiller Coulombs flydebetingelse. Snittene danner vinklen  $90^\circ - \varphi$  med hinanden og betegnes flyde- eller brudsnittene.

Coulombs flydebetingelse kan udtrykkes på hovedspændingsform, idet den beskriver et isotropt materiale. Herom henvises til f.eks. Mekanik 2.2, del 2 [00.1].

Jordarter har normalt ringe eller ingen trækstyrke. Coulombs flydebetingelse burde derfor suppleres med en afskæring svarende til trækstyrken ligesom det gøres f.eks. for beton. Dette vil ikke blive gjort i det følgende. Vi vil i stedet forudsætte, at der kun arbejdes med spændingstilstande, hvor alle hovedspændinger er tryk evt. nul.

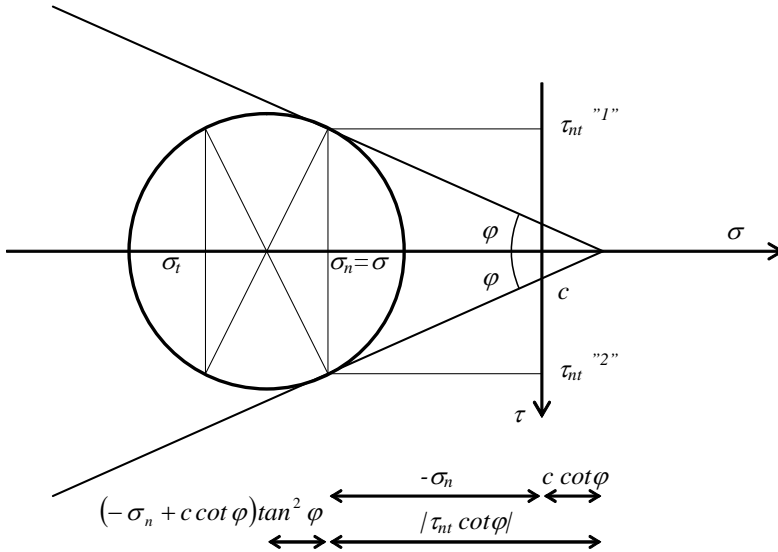
Materialer, der tilfredsstiller Coulombs flydebetingelse, kaldes Coulomb materialer.

Ved plane deformationstilstande er hovedspændingerne i planen  $\sigma_1$  og  $\sigma_3$  hhv. største og mindste hovedspænding. Den tredje hovedspænding ligger mellem disse værdier. Ved plan deformationstilstand skal den største Mohr's cirkel altså tegnes med diameteren  $\sigma_1 - \sigma_3$  ( $\sigma_1 > \sigma_3$ ).

Coulombs flydebetingelse er ikke altid særlig nøjagtig for jordarter. For udrænet brud kan man som nævnt regne friktionsvinklen til nul og med en kohæsion, der svarer til porøsiteten. Her er Coulombs brudbetingelse meget nøjagtig. For kohæsionløse materialer, såkaldte friktionsmaterialer, finder man ofte for små spændinger en krum

kurve i et  $\sigma, \tau$ -koordinatsystem. Hulaheden vender mod  $\sigma$ -aksen. Problemerne berøres kort i kapitel 3.

En spændingstilstand, der tilfredsstiller Coulombs flydebetingelse, kan naturligvis angives i et retvinklet koordinatsystem, f.eks. et  $n, t$ -system. Vi lader  $n$ -aksen være normal til det ene snit, i hvilket flydebetingelsen er opfyldt. Mohr's cirkel er vist i figur 2.4.



Figur 2.4: Flydebetingelsen for Coulomb materiale

Som det ses er der to løsninger, "1" og "2", for henholdsvis positiv og negativ værdi af forskydningsspændingen  $\tau_{nt}$ . Fortegnet på forskydningsspændingen indvirker dog ikke på størrelserne af  $\sigma_n$  og  $\sigma_t$ .

Ved at benytte de geometriske størrelser angivet i figur 2.4 fås følgende sammenhænge imellem spændingerne:

$$\pm \frac{\tau_{nt}}{\tan \varphi} = -\sigma_t + \frac{c}{\tan \varphi}$$

$\Updownarrow$

$$\tau_{nt} = \pm(c - \sigma_t \tan \varphi)$$

$$\sigma_t = \sigma_n - 2(-\sigma_n + c \cot \varphi) \tan^2 \varphi$$

$\Updownarrow$

$$\sigma_t = (1 + 2 \tan^2 \varphi) \sigma_n - 2c \tan \varphi$$

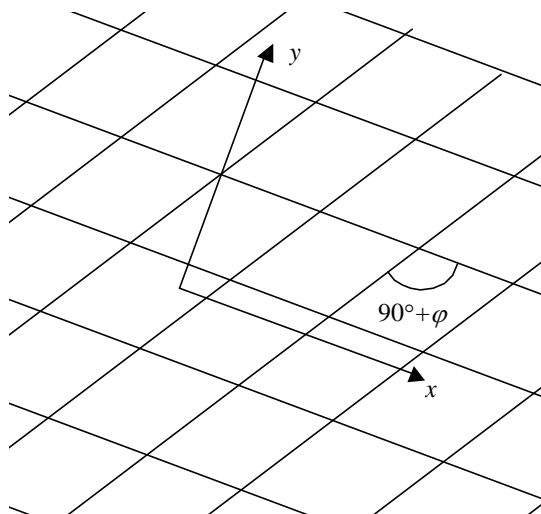
$$\sigma_n = \sigma$$

Herved fås endelig følgende sammenhænge imellem spændingerne, hvor  $\sigma_n = \sigma$  er den eneste ubekendte.

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma \\ \sigma_t &= (1 + 2 \tan^2 \varphi) \sigma - 2c \tan \varphi \\ \tau_{nt} &= \pm (c - \sigma \tan \varphi)\end{aligned}\tag{2.9}$$

### 2.3.4 Rankine zonen

I Rankine zonen er retningerne for de to snit, hvor flydetingelsen er opfyldt, konstante. De to snit kan derfor beskrives ved to sæt af parallelle linier, se figur 2.5.



Figur 2.5: Rankine zonen

I figur 2.5 er x-aksen som vist orienteret langs en af disse rette linier, og y-aksen er vinkelret herpå.

Herved giver flydebetingelsen følgende sammenhæng imellem spændingerne i  $x, y$ -koordinatsystemet:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (1 + 2 \tan^2 \varphi) \sigma - 2c \tan \varphi \\ \sigma_y &= \sigma \\ \tau_{xy} &= \pm (c - \sigma \tan \varphi)\end{aligned}\tag{2.10}$$



Indsættes disse spændinger i ligevægtsligningerne (2.2) og (2.3) fås:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \Downarrow \\ (1 + 2 \tan^2 \varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} \mp \tan \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \Downarrow \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} \mp \tan \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (2.12)$$

Hvis sidste ligning (2.12) multipliceres med  $\pm \tan \varphi$  og adderes til (2.11) ses, at  $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$ . Af (2.12) ses, at så er også  $\frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0$ . Dette betyder, at den eneste løsning for

Rankine zonen er:

$$\sigma = k \quad (2.13)$$

hvor  $k$  er en konstant.  $k$  må naturligvis ikke forveksles med konstanten  $k$  hørende til Coulombs brudbetingelse. Jf. f.eks. (2.56). Udfra figur 2.4 ses, at  $k < c \cot \varphi$ . Herved fås at spændingstilstanden for en Rankine zone kan skrives:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (1 + 2 \tan^2 \varphi) k - 2c \tan \varphi \\ \sigma_y &= k \\ \tau_{xy} &= \pm (c - k \tan \varphi)\end{aligned}\quad (2.14)$$

I friktionsløs jord fås løsningen:

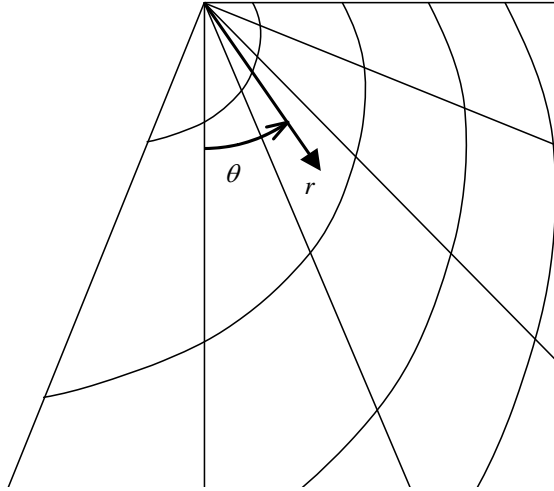
$$\begin{aligned}\sigma_x &= k \\ \sigma_y &= k \\ \tau_{xy} &= \pm c\end{aligned}\quad (2.15)$$

hvor  $k$  er en arbitrær konstant.

### 2.3.5 Prandtl zonen

Prandtl zonen fremkommer ved, at snit langs radier fra et punkt opfylder flydebetingelserne. Ved at indføre et polært koordinatsystem med begyndelsespunkt i dette punkt, opfyldes flydebetingelsen altså i snit langs radier. Coulombs flydebetingelse siger, at et tilsvarende snit, der opfylder flydebetingelse, vil ligge

under en vinkel på  $\frac{\pi}{2} \pm \varphi$  med de radiære snit (kun et fortegn benyttes). Der dannes herved linier, der følger spiraler, hvor snit opfylder flydebetingelsen, se figur 2.6. Spiralen kan vende begge veje, hvilket resulterer i bestemmelse af fortegn for forskydningsspændingen.



Figur 2.6: Prandtl zonen

I et lokalt  $n, t$ -system med  $n$ -aksen i  $r$ -retningen er spændingstilstanden karakteriseret ved

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \sigma \\ \sigma_r &= (1 + 2 \tan^2 \varphi) \sigma - 2c \tan \varphi \\ \tau_{r\theta} &= \pm (c - \sigma \tan \varphi)\end{aligned}\quad (2.16)$$

Ved indsættelse af (2.16) i de polære ligevægtsbetingelser (2.5) og (2.6) fås:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} r &= 0 \\ \Downarrow \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \pm 2(c - \sigma \tan \varphi) \mp \tan \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial r} r &= 0\end{aligned}\quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}\sigma_r - \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} &= 0 \\ \Downarrow \\ 2 \tan^2 \varphi \sigma - 2c \tan \varphi + (1 + 2 \tan^2 \varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial r} r \mp \tan \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}\quad (2.18)$$

Multipliceres (2.17) med  $\pm \tan \varphi$  og adderes til (2.18) fås

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0 \quad (2.19)$$

$\sigma$  er altså konstant langs radierne.

Ligning (2.17) giver herefter

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \pm 2(c - \sigma \tan \varphi) = 0 \quad (2.20)$$

der har løsningen

$$\sigma = -ke^{\pm 2\theta \tan \varphi} + c \cot \varphi \quad (2.21)$$

hvor  $k$  er en konstant.

Herved fås at spændingstilstanden for friktionsjord i en Prandtl zone er bestemt ved:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= c \cot \varphi - ke^{\pm 2\theta \tan \varphi} \\ \sigma_r &= c \cot \varphi - (1 + 2 \tan^2 \varphi) ke^{\pm 2\theta \tan \varphi} \\ \tau_{r\theta} &= \pm k \tan \varphi e^{\pm 2\theta \tan \varphi} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Idet  $\sigma_\theta < c \cot \varphi$  ifølge flydebetingelsen i figur 2.4, betyder det at  $k$  endvidere må være en positiv konstant.

Da der ikke kan findes nogen grænseværdi for  $\varphi$  gående mod nul, kan løsningen ikke bruges for friktionsløs jord. Løsningen for friktionsløs jord findes ved indsætte ligningerne (2.16) i ligevægtsbetingelserne, idet friktionsvinkelen  $\varphi$  sættes lig med nul. Af (2.16) fås:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \sigma \\ \sigma_r &= \sigma \\ \tau_{r\theta} &= \pm c \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ligevægtsligningerne giver:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \pm 2c = 0 \quad (2.24)$$

$\Downarrow$

$$\sigma = \mp 2c\theta + f_1(r) \quad (2.25)$$

hvor  $f_1$  er en arbitrær funktion af  $r$ .

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} r = 0 \quad (2.26)$$

$\Downarrow$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = 0 \quad (2.27)$$

Dvs.  $f_1$  er en konstant som benævnes  $k$ .

Herved bliver løsningen for spændingen  $\sigma$ :

$$\sigma = \mp 2c\theta + k \quad (2.28)$$

Spændingstilstanden i en Prandtl zone for friktionløs jord bliver herved:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} &= \mp 2c\theta + k \\ \sigma_r &= \mp 2c\theta + k \\ \tau_{r\theta} &= \pm c\end{aligned}\tag{2.29}$$

hvor  $k$  er en arbitrær konstant.

## 2.4 Øvreværdiløsninger

Som nævnt i afsnit 2.1 arbejdes der ved bestemmelse af øvreværdiløsninger med geometrisk mulige flytningstilstande. De geometriske betingelser, der skal tilfredsstilles, afhænger af hvilke variable der benyttes, se det følgende.

Øvreværdier for proportionalbelastning bestemmes vha. arbejdsligningen, hvor det ydre arbejde sættes lig med dissipationen for det pågældende geometrisk mulige flytningsfelt.

### 2.4.1 Geometriske betingelser

Hvis en geometrisk mulig brudfigur fastlægges ud fra en valgt flytningstilstand skal følgende geometriske betingelser være opfyldt:

- 1) De geometriske randbetingelser for flytningsfeltet skal være opfyldt.
- 2) De tøjninger, der svarer til flytningerne, skal opfylde normalitetsbetingelsen.

Hvis der tages udgangspunkt i tøjningerne skal tøjningerne vælges således, at der til tøjningerne svarer en geometrisk mulig flytningstilstand, dvs. tøjningstilstanden skal gøre det muligt at tilfredsstille de geometriske randbetingelser. Tøjningerne kan ikke vælges vilkårligt. Til en forelagt tøjningstilstand svarer kun en geometrisk mulig flytningstilstand, hvis de såkaldte kompatibilitetsbetingelser er tilfredsstillet. Følgende betingelser skal således være opfyldte:

- 1) Kompatibilitetsbetingelserne
- 2) Tøjningerne skal tilfredsstille normalitetsbetingelsen.

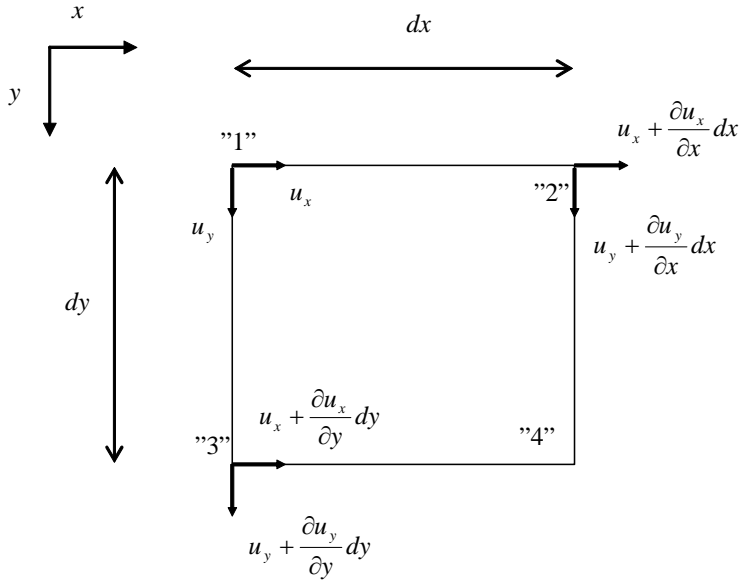
For plane deformationstilstande er der kun én kompatibilitetsbetingelse. Vedr. kompatibilitetsbetingelser i rummet, se Mekanik 2.2, del 1 [91.1].

I det følgende udtrykkes kompatibilitetsbetingelsen i rektangulære og polære koordinater.

Kompatibilitetsbetingelsen udledes normalt rent matematisk ved at kræve at en integrand skal være et totalt differential, se f.eks. Mekanik 2.2, del 1 [91.1]. Denne betingelse kan opskrives på en mere anskuelig måde som vist i det følgende.

### 2.4.1.1 Rektangulære koordinater

Flytningerne i rektangulære koordinater betegnes hhv.  $u_x$  og  $u_y$ . I figur 2.7 er flytningsfeltet illustreret i omegnen af et punkt. Flytningen er  $u_x$  for punkt "1" i  $x$ -aksens retning. Flytningen af punkt "2" i  $x$ -aksens er  $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$  plus højere ordens led. Tilsvarende forhold gælder vedr. flytningen  $u_y$ .



Figur 2.7: Flytningsfelt i rektangulære koordinater

Ud fra de i figur 2.7 viste flytninger fås følgende normal- og tværtøjninger:

$$\varepsilon_x = \frac{u_x^2 - u_x^1}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.30)$$

$$\varepsilon_y = \frac{u_y^3 - u_y^1}{dy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.31)$$

$$\varepsilon_{xy} - \omega = \frac{u_y^2 - u_y^1}{dx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.32)$$

$$\varepsilon_{yx} + \omega = \frac{u_x^3 - u_x^1}{dy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (2.33)$$

hvor  $\omega$  er en vilkårlig rotation af legemet. Vinkelændringen  $\gamma_{xy}$  kan findes som summen af de to tværtøjninger:

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \omega + \frac{\partial u_x}{\partial y} - \omega = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.34)$$

Kompatibilitetsbetingelsen findes ved at kræve at flytningsbestemmelsen skal være uafhængig af integrationsvejen. Opstilles ligninger for bestemmelse af  $u_x$  og  $u_y$  ved at integrere over henholdsvis punkt "2" og "3" fås:

$$\begin{aligned} u_x^4 &= u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right)}{\partial y} dy = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right)}{\partial x} dx \\ \Downarrow \\ \varepsilon_x dx + (\varepsilon_{yx} + \omega) dy + \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} dy dx &= (\varepsilon_{yx} + \omega) dy + \varepsilon_x dx + \frac{\partial (\varepsilon_{yx} + \omega)}{\partial x} dx dy \\ \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} &= \frac{\partial (\varepsilon_{yx} + \omega)}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} u_y^4 &= u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \left( u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right)}{\partial y} dy = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial \left( u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy \right)}{\partial x} dx \\ \Downarrow \\ (\varepsilon_{xy} - \omega) dx + \varepsilon_y dy + \frac{\partial (\varepsilon_{xy} - \omega)}{\partial y} dy dx &= \varepsilon_y dy + (\varepsilon_{xy} - \omega) dx + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} dx dy \\ \frac{\partial (\varepsilon_{xy} - \omega)}{\partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Rotationen  $\omega$  elimineres herefter af ligningerne (2.35) og (2.36). Elimineringen sker ved at differentiere med hensyn til henholdsvis  $y$  og  $x$  i de to ligninger:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (\varepsilon_{yx} + \omega)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial^2 (\varepsilon_{xy} - \omega)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad (2.38)$$

Herved fås følgende kompatibilitetsbetingelse:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \right)$$

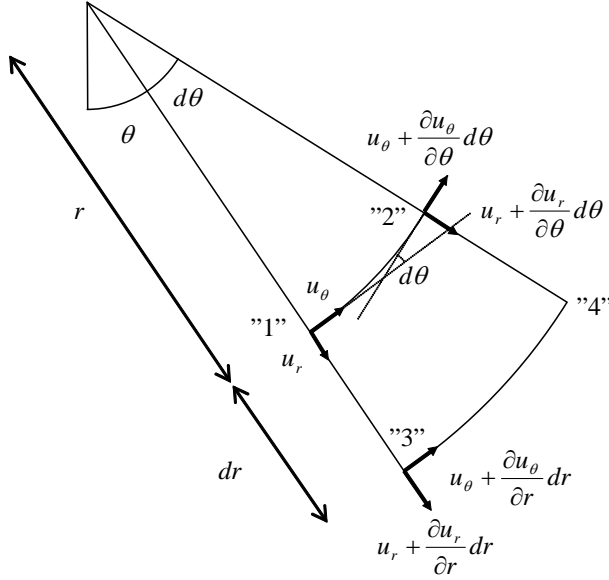
Indføres at vinkelændringen  $\gamma_{xy}$  er summen af tværtøjningerne fås :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad (2.39)$$

Betingelsen (2.39) er, som den er udledt, en tilstrækkelig betingelse for kompatibilitet. At (2.39) også er en nødvendig betingelse fås umiddelbart ved at vise, at når tøjningerne udtrykkes ved flytningerne er resultatet i (2.39) en identitet.

### 2.4.1.2 Polære koordinater

De geometriske betingelser i polære koordinater findes for et infinitesimalt element som vist i figur 2.8.



Figur 2.8: Flytningsfelt i polære koordinater

Ved opskrivning af tøjningerne skal man være opmærksom på, at flytningsvektorerne ændrer retning i det polære koordinatsystem. Der kommer derfor flere bidrag til den samlede flytning i en retning. Ved projektion af flytningerne benyttes følgende approksimation, idet elementet er infinitesimalt:

$$\begin{aligned} \sin(d\theta) &\approx d\theta \\ \cos(d\theta) &\approx 1 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Herved fås følgende normal- og tværtøjninger i polære koordinater:

$$\varepsilon_r = \frac{u_r^3 - u_r^1}{dr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (2.41)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_\theta^2 + u_r^2 d\theta - u_\theta^1}{rd\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \quad (2.42)$$

$$\varepsilon_{\theta r} + \omega = \frac{u_r^2 - u_\theta^2 d\theta - u_r^1}{rd\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta \quad (2.43)$$

$$\varepsilon_{r\theta} - \omega = \frac{u_\theta^3 - u_\theta^1}{dr} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \quad (2.44)$$

Som før er  $\omega$  rotationen af legemet. Vinkelændringen fås til:

$$\gamma_{r\theta} = \varepsilon_{r\theta} + \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta - \omega + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \quad (2.45)$$

Som ved rektangulære koordinater findes kompatibilitetsbetingelsen ved at kræve at flytningsbestemmelserne skal være uafhængige af integrationsvejen. Opstilles ligninger for bestemmelse af  $u_r$  og  $u_\theta$  i punkt "4", ved at integrere over henholdsvis punkt "2" og "3" fås:

$$\begin{aligned} u_\theta^4 &= u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \left( u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta \right)}{\partial r} dr = u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr + \frac{\partial \left( u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr \right)}{\partial \theta} d\theta \\ &\Downarrow \\ \frac{\partial \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)}{\partial r} &= \frac{\partial \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)}{\partial \theta} \\ &\Downarrow \\ \frac{\partial (r\varepsilon_\theta - u_r)}{\partial r} &= \frac{\partial (\varepsilon_{r\theta} - \omega)}{\partial \theta} \\ &\Downarrow \\ r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r &= \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} u_r^4 &= u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \left( u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta \right)}{\partial r} dr = u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr + \frac{\partial \left( u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr \right)}{\partial \theta} d\theta \\ &\Downarrow \\ \frac{\partial \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)}{\partial r} &= \frac{\partial \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)}{\partial \theta} \\ &\Downarrow \\ \frac{\partial (r\varepsilon_\theta + u_\theta + r\varpi)}{\partial r} &= \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \theta} \\ &\Downarrow \\ r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \varepsilon_\theta + \varepsilon_{r\theta} - \omega + \omega + r \frac{\partial \omega}{\partial r} &= \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.47)$$

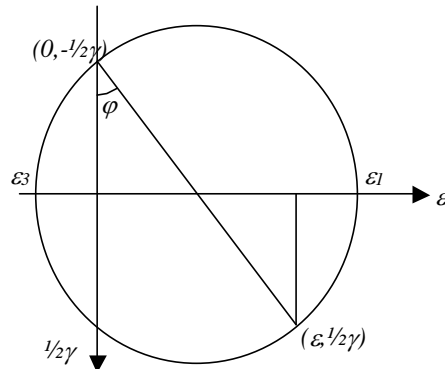
Rotationen  $\omega$  elimineres af ligningerne (2.46) og (2.47) ved at differentiere med hensyn til henholdsvis  $r$  og  $\theta$  i de to ligninger:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \theta} = -r \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} \quad (2.48)$$





I en spids forudsættes i plasticitetsteorien, at tøjningsvektoren kan ligge vilkårligt i det vinkelrum, der dannes af normalens grænsestillinger, når man nærmer sig spidsen af de to mulige veje. Spidsen i Coulombs flydebetingelse vil dog ikke blive behandlet nærmere, da vi, som nævnt tidligere, forudsætter at alle spændingstilstande svarer til tryknormalspændinger.



Figur 2.10: Mohr's cirkel for tøjningerne ved flydning.

Tøjningstilstanden er illustreret vha. Mohr's cirkel i figur 2.10. Det ses at der ikke er normaltøjninger i de snit, i hvilke Coulombs flydebetingelse er opfyldt, flydesnittene eller brudsnittene. Udfra figur 2.10 findes middeltøjningen  $\varepsilon_m$  og radius  $R$  i Mohr's cirkel til:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{1}{2} \delta \sin \varphi \quad (2.52)$$

$$R = \frac{\gamma}{2 \cos \varphi} = \frac{1}{2} \delta \quad (2.53)$$

Herved kan hovedtøjningerne findes:

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \delta (\pm 1 + \sin \varphi) \quad (2.54)$$

Det ses, at summen af hovedtøjningerne er positiv, hvilket betyder, at der er tale om volumenudvidelse (dilatation), undtagen når  $\varphi=0$ .

Hovedspændingerne og hovedtøjningerne er sammenfaldende således som det altid vil være tilfældet for et isotropt materiale. Hovedspændingerne kan f.eks. bestemmes vha. figur 2.4. Man finder:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\sigma \\ \sigma_3 &= -k\sigma - (k-1)c \cot \varphi \end{aligned} \quad (2.55)$$

hvor  $k$  er defineret ved:

$$k = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (2.56)$$

Dissipationen pr. volumenenhed er

$$\begin{aligned} W_v &= \varepsilon_1 \sigma_1 + \varepsilon_3 \sigma_3 = -\frac{1}{2} \delta (1 + \sin \varphi) \sigma + \frac{1}{2} \delta (1 - \sin \varphi) (k \sigma + (k - 1) c \cot \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \delta (1 - \sin \varphi) (k - 1) c \cot \varphi = \delta c \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.57)$$

Dette resultat findes også umiddelbart vha. figur 2.9, idet det skalære produkt af spændingsvektoren og tøjningsvektoren udregnes i det punkt, hvor flydebetingelsen skærer  $\tau$ -aksen, og idet det bemærkes, at alle sådanne produkter er uafhængige af, hvilket punkt på flydebetingelsen, der betragtes.

Det ses, at arbejdet er uafhængigt af størrelsen af spændingerne, og at kohæsionsløse materialer ikke giver nogen dissipation.

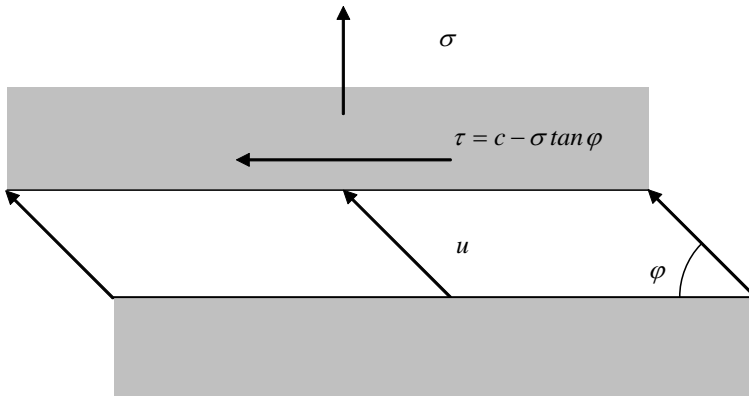
Indsættes udtrykket for vinkelændringen udtrykt ved  $\delta$  iht. (2.51) fås følgende udtryk for dissipationen:

$$W = \int_V c \gamma dV \quad (2.58)$$

hvor  $dV$  er et volumenelement.

### 2.4.3 Flydelinier i Coulomb materialer

Ved en flydelinie forstås grænsetilstanden når man i en smal strimmel med tykkelse  $t$ , der har en homogen tøjningstilstand, lader  $t \rightarrow 0$ .



Figur 2.11: Flydelinie.

Figur 2.11 viser en flydelinie mellem to områder. Det nederste område har ingen flytning, det øverste har flytningen  $u$ . Vha. (2.51) ses, at  $u$  må danne vinkelen  $\varphi$  med flydelinien. Herved bliver  $\varepsilon = u \sin \varphi$  og  $\gamma = u \cos \varphi$  ( $\delta = u$ ). Dissipationen pr. længdeenhed af flydelinien bliver da

$$W_l = ubc \cos \varphi \quad (2.59)$$

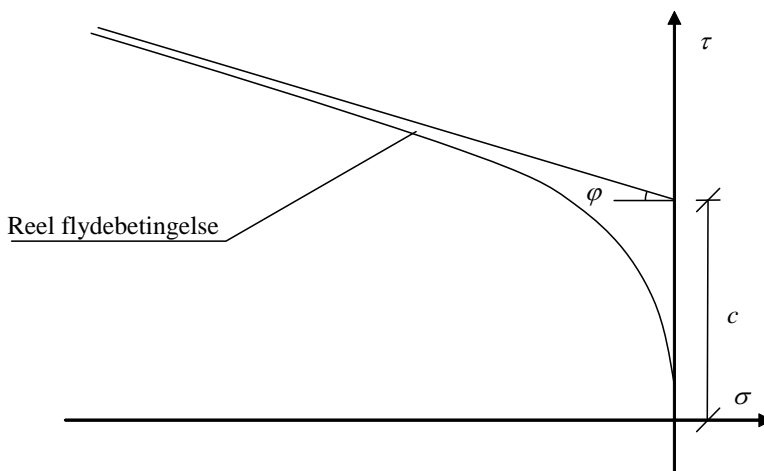
hvor  $b$  er tykkelsen på tværs.

### 3 Bemærkninger om den virkelige flydebetingelse

Denne afhandling tager som nævnt udgangspunkt i det perfekte Coulomb materiale. Jord er dog, som ethvert andet materiale, langt fra perfekt. Af umiddelbare imperfektioner kan nævnes lagdeling, varierende kornstørrelse herunder også kornfordelingen, varierende kornform, varierende porøsitet og vandmætning. Alle tænkelige parametre har en vis indvirkning på styrken af jorden. Skal man tage hensyn til alle disse parametre ved udvikling af en jordtryksteori, vil man hurtigt opdage, at man for længst er nået til det punkt, hvor selv den simpleste beregning er umulig. Det er derfor nødvendigt at have en simpel definition af styrken på jorden, f.eks. Coulombs flydebetingelse. Når det er sagt, må man så også acceptere, at denne flydebetingelse i ekstreme tilfælde kan være langt fra sandheden.

Coulombs flydebetingelse vil i et  $\sigma$ -,  $\tau$ -koordinatsystem beskrive en ret linie. Den egentlige flydebetingelse har ofte et krumt forløb. I figur 3.1 er en typisk flydebetingelse for sand optegnet. Det bemærkes at  $\tau$  går mod nul for  $\sigma$  gående mod nul. Sand har dermed en meget lille forskydningsbæreevne for små tryknormalspændinger, dvs. at den reelle kohæsion er tæt på nul.

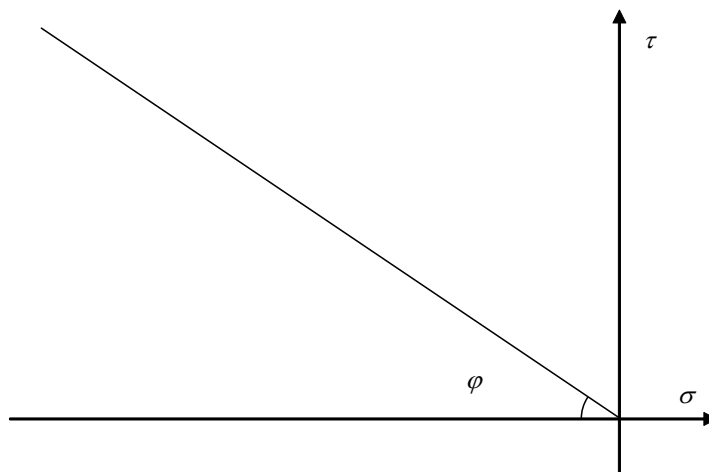
Benyttes en linearisering til bestemmelse af flydebetingelsen, vil den bedste tilpasningskurve være en linie som tangerer den reelle flydebetingelse for store tryknormalspændinger. Man må herved acceptere, at afvigelsen fra den reelle flydebetingelse for små normalspændinger bliver relativt stor. Begrebet ”den tilsyneladende kohæsion” benyttes ofte i forbindelse med lineariseringen, idet den fundne kohæsion svarende til Coulombs flydebetingelse ikke beskriver den reelle flydebetingelse.



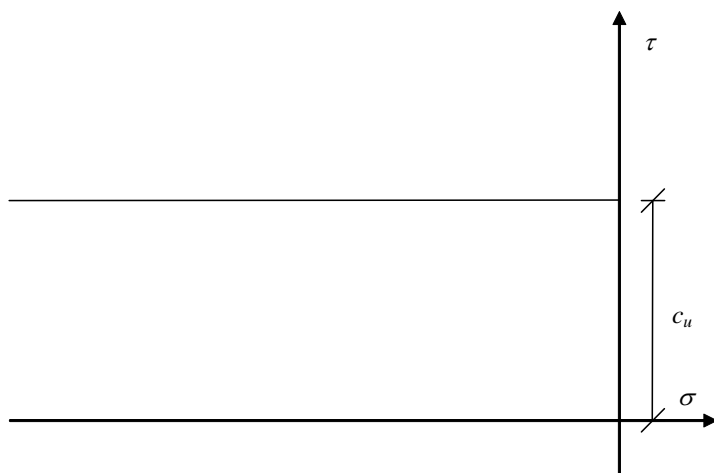
Figur 3.1: Eksempel på en krum flydebetingelse

I laboratoriet bestemmes Coulombs brudbetingelse ved at der udføres forsøg som bestemmer punkter på flydebetingelsen. Disse forsøg udføres enten ved "shear box" forsøg eller ved triaksiale forsøg. Ud fra disse forsøgsresultater kan den tilnærmede flydeflade bestemmes. En nærmere beskrivelse af bestemmelsen af styrkeparametrene  $\varphi$  og  $c$  kan f.eks. findes i [78,1]. Markforsøg er beskrevet i [90,2]. Det bemærkes desuden, at der kan være forskel på den værdi af friktionsvinklen, der bestemmes vha. forsøg med plan deformationstilstand og triaksiale forsøg. Den "plane" værdi kan i praksis ansættes 10% større end den "triaksiale" værdi.

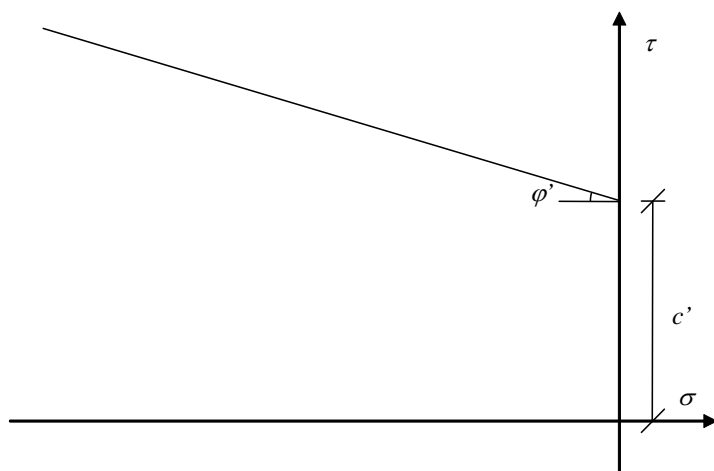
I tilfælde af sand ses der i praksis bort fra kohæsionen. I tilfælde af ler udføres beregninger i det udrænedede og drænedede tilfælde. Det udrænedede tilfælde beskriver tilfældet, hvor belastningen opbygges hurtigere end overskudsvand kan bortdrænes. Flydebetingelsen beskrives ved den udrænedede forskydningsstyrke  $c_u$ . For drænet ler, dvs. i tilfældet hvor materialet når at konsolidere, kan flydebetingelsen beskrives ved den effektive friktionsvinkel  $\varphi'$  og den effektive kohæsion  $c'$ . Herved fås de tre principielle flydebetingelser som vist i figur 3.2 til 3.4. Disse beskriver jords styrke tilnærmet vha. Coulombs flydebetingelse.



Figur 3.2: Flydebetingelse for sand



Figur 3.3: Flydebetingelse for udrænet ler



Figur 3.4: Flydebetingelse for drænet ler





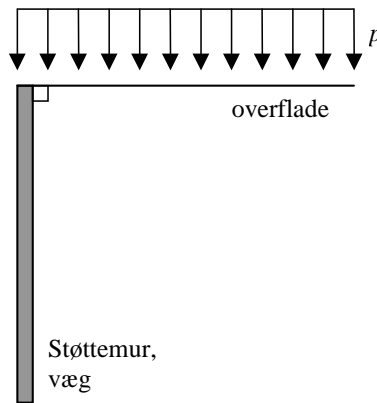
## 4 Eksakte løsninger uden hensyntagen til egenvægt

I det følgende gennemgås kort de kendte eksakte løsninger for jordtryk på vægge eller støttemure. De skyldes Rankine (1857) og Prandtl (1920 og 1927) og kan f.eks. ses i [53.1]. I det følgende angives såvel en spændingstilstand som en flytningstilstand, der opfylder alle betingelser.

Foruden de i det foregående indførte betegnelser benyttes:

$A_c$ : Totale dissipation pr. enhedstykkelse.

$A_p$ : Arbejde pr. enhedstykkelse fra jævnt fordelt spænding.



Figur 4.1: Principskitse af støttemur

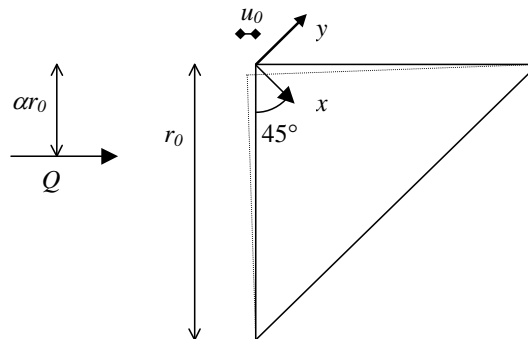
For alle løsninger gælder at væggen er lodret og at vinklen mellem væg og overflade er ret som vist i figur 4.1. Overfladen er påvirket af lasten  $p$  (tryknormalspænding). Hvis spændingerne i jorden skal svare til trykspændinger, må  $p$  nødvendigvis være en positiv trykspænding.

I øvreverdiløsninger medtages jordtrykkets arbejde som arbejdet fra en ydre last  $Q$ . Jordtrykket bestemmes ved at differentiere  $Q$  mht. en lodret koordinat. Arbejdet fra  $Q$  betegnes  $A_Q$ . Det søgte jordtryk betegnes  $q$  ( $q_p$ ,  $q_c$  etc.).

I en væg med topplade er flytningerne nul på overfladen i retningen parallel med overfladen. For jord med kohæsion antages det, at overfladelasten er større end jordens trykstyrke.

## 4.1 Støttemure i kohæsionsjord

### 4.1.1 Glat væg



Figur 4.2: Betegnelse for flytninger

#### Øvreværdiløsning.

Der indlægges det i figur 4.2 viste x,y-koordinatsystem, der er drejet  $45^\circ$  i forhold til væg og jordoverflade. Tøjningstilstanden er ren vinkelændring i x,y-systemet. Herved er normalitetsbetingelsen tilfredsstillet. Flytningen er nul langs en linie under  $45^\circ$  med væg udgående i afstanden  $r_0$  fra skæringspunktet mellem væg og den vandrette overflade. Størrelsen  $u_0$  er den vandrette flytning i koordinatsystemets begyndelsespunkt. Der er flytningsdiskontinuiteter i vægretningen langs væggen. De giver imidlertid ikke noget bidrag til dissipationen, da væggen er glat.

Flytningsfeltet bliver herved:

$$u_x = 0$$

$$u_y = -\sqrt{2}u_0 \left( 1 - \sqrt{2} \frac{x}{r_0} \right)$$

Tøjningstilstanden bliver:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 2 \frac{u_0}{r_0}$$

Dissipationen bestemmes vha. formel (2.58):

$$A_c = \int_0^{\frac{\sqrt{2}r_0}{2}} \int_{-x}^x c \gamma_{xy} dy dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}r_0}{2}} \int_{-x}^x 2c \frac{u_0}{r_0} dy dx$$

$$A_c = \int_0^{\frac{\sqrt{2}r_0}{2}} 4c \frac{u_0}{r_0} x dx = \left[ 2c \frac{u_0}{r_0} x^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{2}r_0}{2}} = cu_0 r_0$$

Det ydre arbejde fra overfladelasten er:

$$A_p = \frac{1}{2} p r_0 u_0$$

Det ydre arbejde fra jordtrykket  $Q$  virkende i afstanden  $\alpha r_0$  fra overfladen bliver:

$$A_Q = -u_0 Q(1-\alpha)$$

Arbejdslikningen får herefter formen:

$$A_p + A_Q = A_c$$

der giver:

$$(1-\alpha)u_0 Q = \frac{1}{2} p r_0 u_0 - c r_0 u_0$$

Herefter findes  $Q$  til:

$$Q = \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{2} p r_0 - c r_0 \right)$$

Den afledede af  $Q$  mht.  $r_0$  er:

$$q = \frac{dQ}{dr_0} = \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{2} p - c \right)$$

der bestemmer det søgte jordtryk,  $q$ . Jordtrykket  $q_p$  for  $c=0$  bliver:

$$q_p = \frac{1}{1-\alpha_p} \frac{1}{2} p = \text{konstant, dvs. } \alpha_p = \frac{1}{2}$$

For givet  $p$  er  $q_p$  altså konstant, hvilket betyder, at resultanten  $Q$  angriber midt på strækningen  $r_0$ , dvs.  $\alpha = \alpha_p = 1/2$ . Jordtrykket  $q_c$  for  $p=0$  bliver:

$$q_c = \frac{1}{1-\alpha_c} c = \text{konstant, dvs. } \alpha_c = \frac{1}{2}$$

Vi har altså følgende øvreværdiløsning:

$$q = p - 2c$$

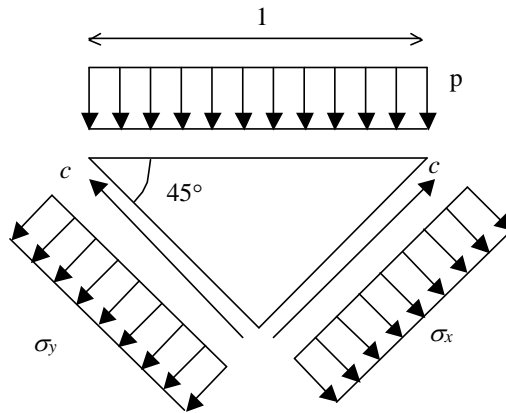
### Nedreværdiløsning.

Vi antager, idet  $k$  er en konstant, der kun afhænger af overfladelasten  $p$ , at:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma = k$$

og at:

$$\tau_{xy} = c$$



Figur 4.3: Betegnelse for spændinger for et punkt på overfladen

Lodret projektion, se figur 4.3, giver:

$$p - c + \frac{1}{2} \sigma_x (x, y = x) + \frac{1}{2} \sigma_y (x, y = x) = 0$$

dvs.

$$p - c + k = 0$$

der fører til

$$k = -p + c$$

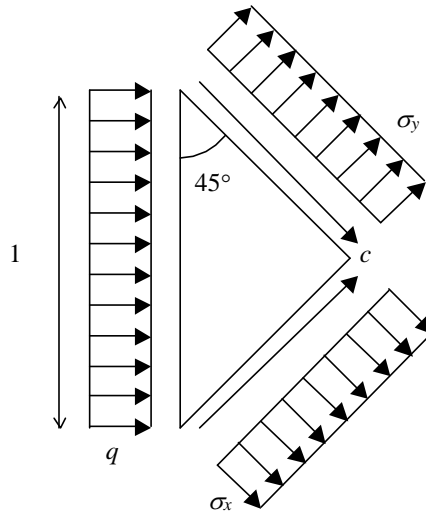
Herved fås spændingerne

$$\sigma_x = -p + c$$

$$\sigma_y = -p + c$$

$$\tau_{xy} = c$$

der umiddelbart ses at tilfredsstille ligevægtsbetingelserne og flydebetingelsen.



Figur 4.4: Betegnelse for spændinger for et punkt langs væggen

Vandret projektion, se figur 4.4, giver:

$$q + c + \frac{1}{2} \sigma_x \left( x = -y = \frac{\sqrt{2}r_0}{2} \right) + \frac{1}{2} \sigma_y \left( x = -y = \frac{\sqrt{2}r_0}{2} \right) = 0$$

Heraf findes

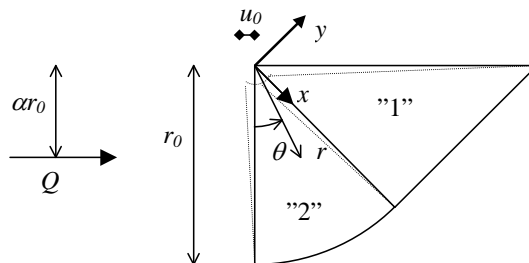
$$q = -c - \frac{1}{2}(-p + c) - \frac{1}{2}(-p + c)$$

eller

$$q = p - 2c$$

Løsningen er altså den samme som øvreværdiløsningen, dvs. løsningen er eksakt.

#### 4.1.2 Ru væg



Figur 4.5: Betegnelse for flytninger

### Øvreværdiløsning.

Flytningstilstanden er skitseret i figur 4.5. I felt 2 sættes forsøgsvis:

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = -\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)u_0$$

I dette tilfælde er der ingen flytningsdiskontinuitet langs væggen. Herved bliver tøjningerne i felt 2:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r = 0$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta = \frac{u_0}{r_0} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)u_0 = \frac{u_0}{r}$$

Der er tale om ren vinkelændring, således at normalitetsbetingelsen er opfyldt:

For  $\theta = \frac{\pi}{4}$  er  $u_y = u_\theta(r=x)$  og  $u_x = u_r$ .

I felt 1 sætter vi forsøgsvis:

$$u_x = 0$$

$$u_y = -u_0 \left(1 - \frac{x}{r_0}\right)$$

hvorved flytningerne bliver ens i skillelinien mellem felt 2 og felt 1.

Tøjningerne i felt 1 bliver da:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{u_0}{r_0}$$

Dissipationen bliver, se formel (2.58):

$$A_c = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{r_0} c \gamma_{r\theta} r dr d\theta + \int_0^{r_0} \int_0^x c \gamma_{xy} dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{r_0} c \frac{u_0}{r_0} r dr d\theta + \int_0^{r_0} \int_0^x c \frac{u_0}{r_0} dy dx$$

dvs.:

$$A_c = \frac{\pi}{2} c r_0 u_0 + \int_0^{r_0} c \frac{u_0}{r_0} x dx = \frac{\pi}{4} c u_0 r_0 + \frac{1}{2} c u_0 r_0$$

Overfladelastens arbejde er:

$$A_p = \frac{1}{2} p \left( \sqrt{2} r_0 \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} u_0 \right) = \frac{1}{2} p r_0 u_0$$

Arbejdet for kraften  $Q$  i afstanden  $\alpha r_0$  fra overfladen er:

$$A_Q = -u_0 Q (1 - \alpha)$$

Arbejdslikningen får da følgende udseende:

$$A_p + A_Q = A_c$$

dvs.

$$(1 - \alpha) u_0 Q = \frac{1}{2} p r_0 u_0 - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) c r_0 u_0$$

Heraf findes:

$$Q = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p r_0 - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) c r_0 \right)$$

Jordtrykket  $q$  bliver

$$q = \frac{dQ}{dr_0} = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) c \right)$$

I analogi med det foranstående tilfælde fås:

$$q_p = \frac{1}{1 - \alpha_p} \frac{1}{2} p = \text{konstant, dvs. } \alpha_p = \frac{1}{2}$$

$$q_c = \frac{1}{1 - \alpha_c} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) c = \text{konstant, dvs. } \alpha_c = \frac{1}{2}$$

$$q = p - \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) c$$

Nedreværdiløsning.

Spændingstilstand i felt 1 er som for glat væg, dvs.:

$$\sigma_x = -p + c$$

$$\sigma_y = -p + c$$

$$\tau_{xy} = c$$

Overgangbetingelser imellem felt 1 og 2 ( $y=0$ ,  $x=r$ ), giver derfor:

$$\sigma_r = \sigma_x (x = r, y = 0) = -p + c$$

$$\sigma_\theta = \sigma_y (x = r, y = 0) = -p + c$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{xy} = c$$

Vi sætter forsøgsvis i felt 2:

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = -2c\theta + k$$

Randbetingelsen for  $\theta = \frac{\pi}{4}$  fører da til betingelsen:

$$\sigma_{\theta}\left(r, \theta = \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}c + k = -p + c$$

der giver

$$k = -p + c + \frac{\pi}{2}c$$

Herved bliver:

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = -2c\theta - p + \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)c$$

Med  $\sigma_r = \sigma_{\theta}$  og  $\tau_{r\theta} = c$  er ligevægtsbetingelserne og flydebetingelsen tilfredsstillet overalt. Endelig kan jordtrykket  $q$  bestemmes ved:

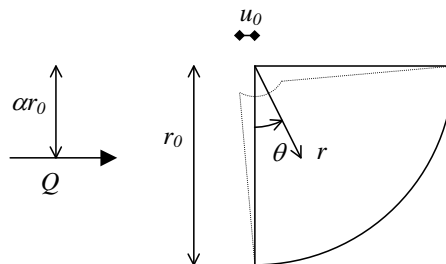
$$q = -\sigma_{\theta}(r, \theta = 0) = p - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)c$$

Løsningen er den samme som øvreværdiløsningen. Løsningen er derfor eksakt.

### 4.1.3 Ru væg, toplade

Med toplade forstås at der tillades overførelse af forskydningsspændinger mellem jordoverfladen og topladen. Denne forskydningsspænding vil naturligvis bevirke, at topladen vil få en resulterende vandret kraft, som skal optages af konstruktionen for at sikre en global ligevægt.

Øvreværdiløsning.



Figur 4.6: Betegnelse for flytninger

Flytningstilstanden er skitseret i figur 4.6. Vi sætter forsøgsvis i hele området.:

$$u_r = 0$$



$$u_\theta = -\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)u_0$$

I dette tilfælde er der ingen flytningsdiskontinuiteter langs væggen eller jordoverfladen.

Denne flytningstilstand giver tøjningerne:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r = 0$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta = +\frac{u_0}{r_0} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)u_0 = \frac{u_0}{r}$$

Som ovenfor er normalitetsbetingelsen opfyldt.

Herved bliver dissipationen, se formel (2.58):

$$A_c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_0} c \gamma_{r\theta} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_0} c u_0 dr d\theta = \frac{\pi}{2} c u_0 r_0$$

Overfladelastens arbejde er:

$$A_p = \frac{1}{2} p r_0 u_0$$

Arbejdet for kraften  $Q$  i afstanden  $\alpha r_0$  fra overfladen er:

$$A_Q = -u_0 Q (1 - \alpha)$$

Herved bliver arbejdslikningen:

$$A_p + A_Q = A_c$$

dvs.:

$$(1 - \alpha) u_0 Q = \frac{1}{2} p r_0 u_0 - \frac{\pi}{2} c r_0 u_0$$

der giver:

$$Q = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p r_0 - \frac{\pi}{2} c r_0 \right)$$

Jordtrykket  $q$  bliver:

$$q = \frac{dQ}{dr_0} = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p - \frac{\pi}{2} c \right)$$

I analogi med ovenfor behandlede tilfælde fås:

$$q_p = \frac{1}{1-\alpha_p} \frac{1}{2} p = \text{konstant, dvs. } \alpha_p = \frac{1}{2}$$

$$q_c = \frac{1}{1-\alpha_c} \frac{\pi}{2} c = \text{konstant, dvs. } \alpha_c = \frac{1}{2}$$

Jordtrykket bliver derfor:

$$q = p - \pi c$$

Nedreværdiløsning.

Vi sætter forsøgsvis

$$\sigma_\theta(r, \theta) = -2c\theta + k$$

Randbetingelse for  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :  $\sigma_\theta = -p$

$$\sigma_\theta\left(r, \theta = \frac{\pi}{2}\right) = -c\pi + k = -p$$

$\Downarrow$

$$k = c\pi - p$$

Herved bliver:

$$\sigma_\theta(r, \theta) = c(\pi - 2\theta) - p$$

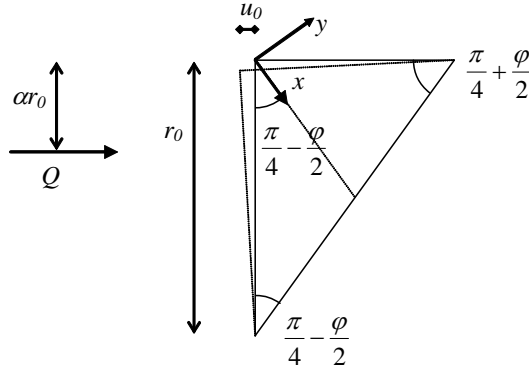
Med  $\sigma_r = \sigma_\theta$  og  $\tau_{r\theta} = c$  er ligevægtsbetingelserne og flydebetingelsen tilfredsstillet.

Jordtrykket  $q$  bliver:

$$q = -\sigma_\theta(r, \theta = 0) = p - \pi c$$

## 4.2 Støttemure i friktions- og kohæsionsjord

### 4.2.1 Glat væg



Figur 4.7: Betegnelse for flytninger

#### Øvre værdiløsning.

Flytningstilstanden er skitseret i figur 4.7. Flytningerne er nul langs en linie fra

bunden af væggen under vinklen  $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$  med væggen. En linie gennem

koordinatsystemets begyndelsespunkt under vinklen  $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$  med væggen roterer om

dens skæringspunkt med den omtalte linie under vinklen  $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$  med væggen. Herved bliver flytningstilstanden:

$$u_x = 0$$

$$u_y = -\frac{u_0}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \left( 1 - \frac{2x}{r_0} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{2y}{r_0} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi \right)$$

der svarer til tøjningerne:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{2u_0}{r_0} \tan \varphi$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{2u_0}{r_0}$$

Det ses, at forholdet mellem  $\varepsilon_y$  og  $\gamma_{xy}$  er  $\tan \varphi$ , jf. formel (2.51). Normalitetsbetingelsen er således opfyldt. Dissipationen bliver, se formel (2.58):

$$A_c = \int_V c \gamma_{xy} dV = 2c \frac{u_0}{r_0} \left[ \frac{1}{2} r_0^2 \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] = cu_0 r_0 \frac{1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)} = cu_0 r_0 \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Arbejdet for overfladelasten bliver:

$$A_p = \frac{1}{2} p r_0 u_0 \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{2} p r_0 u_0 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

Arbejdet fra kraften  $Q$  bliver:

$$A_Q = -u_0 Q (1 - \alpha)$$

Herved fås arbejdslikningen:

$$A_p + A_Q = A_c$$

der giver:

$$\frac{1}{2} p r_0 u_0 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - (1 - \alpha) u_0 Q = cu_0 r_0 \frac{(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi}$$

Heraf findes:

$$Q = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p r_0 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - c r_0 \frac{(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi} \right)$$

der giver jordtrykket:

$$q = \frac{dQ}{dr_0} = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - c \frac{(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi} \right)$$

I analogi med ovenfor behandlede tilfælde fås:

$$q_p = \frac{1}{1 - \alpha_p} \frac{1}{2} p \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \text{konstant, dvs. } \alpha_p = \frac{1}{2}$$

$$q_c = \frac{1}{1 - \alpha_c} c \frac{(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi} = \text{konstant, dvs. } \alpha_c = \frac{1}{2}$$

Jordtrykket bliver således:

$$q = p \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - 2c \frac{(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi}$$

### Nedreværdiløsning.

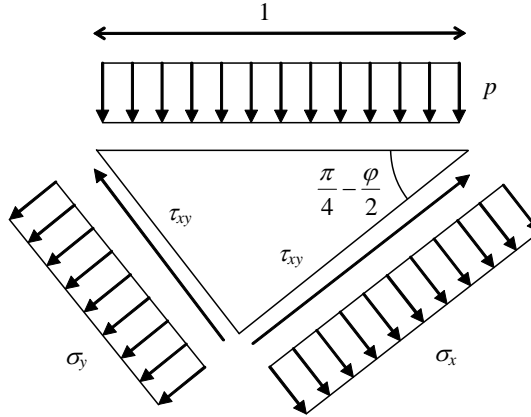
Vi sætter forsøgsvis, se formel (2.10):

$$\sigma_x = (1 + 2 \tan^2 \varphi)k - 2c \tan \varphi$$

$$\sigma_y = k$$

$$\tau_{xy} = c - k \tan \varphi$$

Herved er ligevægtsbetingelserne og flydebetingelsen tilfredsstillet.



Figur 4.8: Betegnelse for spændinger for et punkt langs overfladen

Lodret projektion, se figur 4.8, giver:

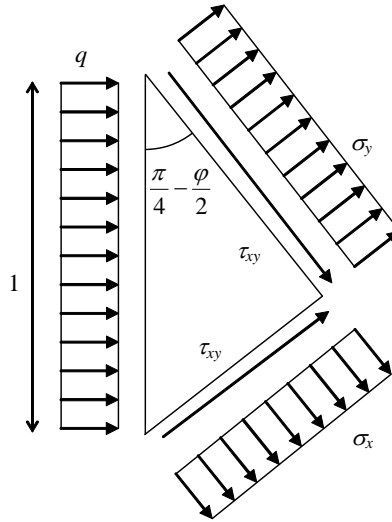
$$-p = \sigma_x \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \sigma_y \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - 2\tau_{xy} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Betingelsen kan skrives:

$$-p = \frac{1}{2} [(1 + 2 \tan^2 \varphi)k - 2c \tan \varphi] (1 + \sin \varphi) + \frac{1}{2} [k] (1 - \sin \varphi) - [(c - k \tan \varphi)] \cos \varphi$$

Løses ligningen mht.  $k$  fås:

$$k = \frac{-p + c \tan \varphi (1 + \sin \varphi) + c \cos \varphi}{1 + \tan^2 \varphi (1 + \sin \varphi) + \sin \varphi} = -p(1 - \sin \varphi) + c \cos \varphi$$



Figur 4.9: Betegnelse for spændinger for et punkt langs væggen

Vandret projektion, se figur 4.9, giver:

$$-q = \sigma_x \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \sigma_y \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 2\tau_{xy} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Betingelsen kan skrives:

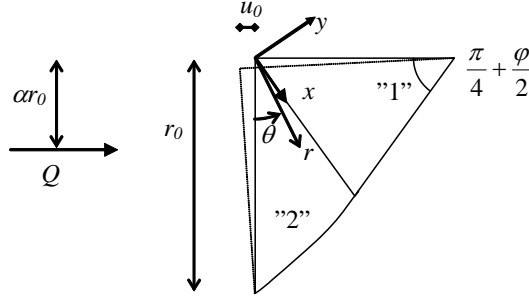
$$\begin{aligned} -q &= \frac{1}{2} \left[ (1 + 2 \tan^2 \varphi) [-p(1 - \sin \varphi) + c \cos \varphi] - 2c \tan \varphi \right] (1 - \sin \varphi) \\ &+ \frac{1}{2} \left[ [-p(1 - \sin \varphi) + c \cos \varphi] (1 + \sin \varphi) + [c - [-p(1 - \sin \varphi) + c \cos \varphi] \tan \varphi] \right] \cos \varphi \end{aligned}$$

Løses ligningen mht.  $q$  fås:

$$q = p \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - 2c \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Løsningen er den samme som øvreværdiløsningen. Den er derfor eksakt.

#### 4.2.2 Ru væg



Figur 4.10: Betegnelse for flytninger

#### Øvreværdiløsning.

Flytningstilstanden er skitseret i figur 4.10. I analogi med flytningstilstanden i afsnit 4.2.1 sættes forsøgsvis i felt 2:

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = -\left(1 - \frac{r}{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}}\right) u_0 e^{-\theta \tan \varphi}$$

Tøjningerne i felt 2 bliver herved:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{r} u_0 \tan \varphi e^{-\theta \tan \varphi}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta = \frac{u_0}{r_0} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}}\right) u_0 e^{-\theta \tan \varphi} = \frac{1}{r} u_0 e^{-\theta \tan \varphi}$$

Forholdet mellem  $\varepsilon_\theta$  og  $\gamma_{r\theta}$  er  $\tan \varphi$ , jf. (2.51). Herved bliver normalitetsbetingelsen tilfredsstillet.

For  $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$  og  $y=0$  er  $u_y = u_\theta(r=x)$  og  $u_x = u_r$ .

Følgende flytningstilstand i felt 1 opfylder denne betingelse:

$$u_x = 0$$

$$u_y = -u_0 e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{4}\right) \tan \varphi} \left(1 - \frac{x}{r_0 e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{4}\right) \tan \varphi}} - \frac{y}{r_0 e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{4}\right) \tan \varphi}} \tan \varphi\right)$$

Tøjningerne i felt 1 bliver derved:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{u_0 \tan \varphi}{r_0}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{u_0}{r_0}$$

Herefter kan dissipationen udregnes, jf. formel (2.58):

$$\begin{aligned} A_c &= \int_0^{\frac{\pi-\varphi}{2}} \int_0^{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}} c \gamma_{r\theta} r dr d\theta + \int_V c \gamma_{xy} dV = \int_0^{\frac{\pi-\varphi}{2}} \int_0^{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}} c u_0 e^{-\theta \tan \varphi} dr d\theta + \int_V \frac{c u_0}{r_0} dV \\ &= \int_0^{\frac{\pi-\varphi}{2}} c u_0 r_0 e^{-2\theta \tan \varphi} d\theta + c \frac{u_0}{r_0} \left[ \frac{1}{2} r_0^2 \cos \varphi e^{-\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right) \tan \varphi} \right] = -\frac{c u_0 r_0}{2 \tan \varphi} \left( (1 - \sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right) \tan \varphi} - 1 \right) \end{aligned}$$

Overfladelastens arbejde er:

$$A_p = \frac{1}{2} p \left( 2 \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) r_0 e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi} \right) \left( \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) u_0 e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi} \right) = \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi) p r_0 u_0 e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi}$$

Arbejdet for kraften  $Q$  bliver:

$$A_Q = -u_0 Q (1 - \alpha)$$

Herved fås arbejdsligningen:

$$A_p + A_Q = A_c$$

eller

$$(1 - \alpha) u_0 Q = \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi) p r_0 u_0 e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi} + \frac{c u_0 r_0}{2 \tan \varphi} \left( (1 - \sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi} - 1 \right)$$

Løsning mht.  $Q$  giver:

$$Q = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi) p r_0 e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi} + \frac{c r_0}{2 \tan \varphi} \left( (1 - \sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi} - 1 \right) \right)$$

hvorefter jordtrykket  $q$  findes til:

$$q = \frac{dQ}{dr_0} = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi) p e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi} + 2 c \cot \varphi \left( (1 - \sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi} - 1 \right) \right)$$



I analogi med ovenfor behandlede tilfælde fås:

$$q_p = \frac{1}{1-\alpha_p} \frac{1}{2} (1-\sin \varphi) p e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \tan \varphi} = \text{konstant, dvs. } \alpha_p = \frac{1}{2}$$

$$q_c = \frac{1}{1-\alpha_c} 2c \cot \varphi \left( (1-\sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \tan \varphi} - 1 \right) = \text{konstant, dvs. } \alpha_c = \frac{1}{2}$$

Jordtrykket bliver derfor:

$$q = (1-\sin \varphi) p e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \tan \varphi} - c \cot \varphi \left( (1-\sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \tan \varphi} - 1 \right)$$

Nedreværdiløsning.

Spændingstilstand i felt 1 regnes uændret som for glat væg:

$$\sigma_x = (1+2 \tan^2 \varphi) (-p(1-\sin \varphi) + c \cos \varphi) - 2c \tan \varphi$$

$$\sigma_y = -p(1-\sin \varphi) + c \cos \varphi$$

$$\tau_{xy} = c - (-p(1-\sin \varphi) + c \cos \varphi) \tan \varphi$$

Overgangbetingelser imellem zone 1 og 2 ( $y=0$ ,  $x=r$ ):

$$\sigma_r = \sigma_x (x=r, y=0) = (1+2 \tan^2 \varphi) (-p(1-\sin \varphi) + c \cos \varphi) - 2c \tan \varphi$$

$$\sigma_\theta = \sigma_y (x=r, y=0) = -p(1-\sin \varphi) + c \cos \varphi$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{xy} (x=r, y=0) = c - (-p(1-\sin \varphi) + c \cos \varphi) \tan \varphi$$

I felt 2 sættes, jf. formel (2.22):

$$\sigma_\theta(r, \theta) = c \cot \varphi - k e^{2\theta \tan \varphi}$$

Spændingerne  $\sigma_r$  og  $\tau_{r\theta}$  fremgår også af formel (2.22). Overgangsbetingelserne

imellem felt 1 og felt 2  $\left( \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$  bliver nu:

$$\sigma_\theta \left( r, \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = c \cot \varphi - k e^{\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \tan \varphi} = -p(1-\sin \varphi) + c \cos \varphi$$

der giver

$$k = p(1-\sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \tan \varphi} + e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \tan \varphi} (1-\sin \varphi) c \cot \varphi$$

hvorved vi finder

$$\sigma_\theta(r, \theta) = c \cot \varphi - \left( p(1-\sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \tan \varphi} + e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \tan \varphi} (1-\sin \varphi) c \cot \varphi \right) e^{2\theta \tan \varphi}$$

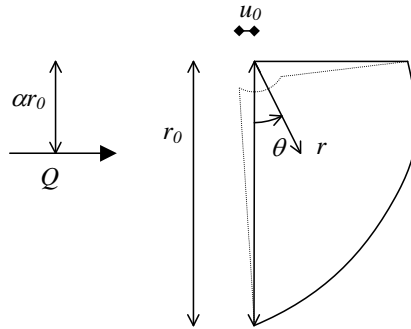
Det ses at ligevægtsbetingelserne, overgangsbetingelserne og flydebetingelsen er tilfredsstillet. Jordtrykket bliver:

$$q = -\sigma_{\theta}(r, \theta = 0) = p(1 - \sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi} + \left( e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi} (1 - \sin \varphi) - 1 \right) c \cot \varphi$$

Løsningen er den samme som øvre værdiløsningen, dvs. løsningen er eksakt.

### 4.2.3 Ru væg, toplade

#### Øvre værdiløsning.



Figur 4.11: Betegnelse for flytninger

Flytningstilstanden er skitseret i figur 4.11. I analogi med det foregående afsnit sættes::

$$u_r = 0$$

$$u_{\theta} = -\left(1 - \frac{r}{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}}\right) u_0 e^{-\theta \tan \varphi}$$

Herved bliver tøjningerne:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{r} u_0 \tan \varphi e^{-\theta \tan \varphi}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_{\theta} = \frac{u_0}{r_0} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}}\right) u_0 e^{-\theta \tan \varphi} = \frac{1}{r} u_0 e^{-\theta \tan \varphi}$$

Forholdet mellem  $\varepsilon_{\theta}$  og  $\gamma_{r\theta}$  er  $\tan \varphi$ , jf. formel (2.51). Normalitetsbetingelsen er altså tilfredsstillet.

Dissipationen bliver:

$$A_c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}} c \gamma_{r\theta} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}} c u_0 e^{-\theta \tan \varphi} dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c u_0 r_0 e^{-2\theta \tan \varphi} d\theta$$

$$= -\frac{c u_0 r_0}{2 \tan \varphi} (e^{-\pi \tan \varphi} - 1)$$

Overfladelastens arbejde er:

$$A_p = \frac{1}{2} p \left( r_0 e^{-\frac{\pi}{2} \tan \varphi} \right) \left( u_0 e^{-\frac{\pi}{2} \tan \varphi} \right) = \frac{1}{2} p r_0 u_0 e^{-\pi \tan \varphi}$$

Arbejdet fra kraften  $Q$  bliver:

$$A_Q = -u_0 Q (1 - \alpha)$$

Herved fås arbejdsligningen:

$$A_p + A_Q = A_c$$

eller

$$(1 - \alpha) u_0 Q = \frac{1}{2} p r_0 u_0 e^{-\pi \tan \varphi} + \frac{c u_0 r_0}{2 \tan \varphi} (e^{-\pi \tan \varphi} - 1)$$

Løsning mht.  $Q$  giver:

$$Q = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p r_0 e^{-\pi \tan \varphi} - \frac{c r_0}{2 \tan \varphi} (e^{-\pi \tan \varphi} - 1) \right)$$

Herved kan jordtrykket bestemmes:

$$q = \frac{dQ}{dr_0} = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p e^{-\pi \tan \varphi} + \frac{c}{2 \tan \varphi} (e^{-\pi \tan \varphi} - 1) \right)$$

I analogi med de foregående tilfælde findes:

$$q_p = \frac{1}{1 - \alpha_p} \frac{1}{2} p e^{-\pi \tan \varphi} = \text{konstant, dvs. } \alpha_p = \frac{1}{2}$$

$$q_c = \frac{1}{1 - \alpha_c} \frac{c}{2 \tan \varphi} (e^{-\pi \tan \varphi} - 1) = \text{konstant, dvs. } \alpha_c = \frac{1}{2}$$

Herved bliver jordtrykket:

$$q = p e^{-\pi \tan \varphi} + c \cot \varphi (e^{-\pi \tan \varphi} - 1)$$

### Nedreværdiløsning.

I analogi med foregående afsnit sættes:

$$\sigma_\theta(r, \theta) = -k e^{2\theta \tan \varphi} + c \cot \varphi$$

Spændingerne  $\sigma_r$  og  $\tau_{r\theta}$  fremgår af formel (2.22).

Randbetingelse:  $\theta = \frac{\pi}{2}; \sigma_{\theta} = -p$

$$\sigma_{\theta}\left(r, \theta = \frac{\pi}{2}\right) = -ke^{\pi \tan \varphi} + c \cot \varphi = -p$$

$\Downarrow$

$$k = (p + c \cot \varphi) e^{-\pi \tan \varphi}$$

Herved bliver:

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = -(p + c \cot \varphi) e^{-\pi \tan \varphi} e^{2\theta \tan \varphi} + c \cot \varphi$$

Som ovenfor ses, at ligevægtsbetingelserne, randbetingelserne og flydebetingelsen er tilfredsstillet. Jordtrykket bliver:

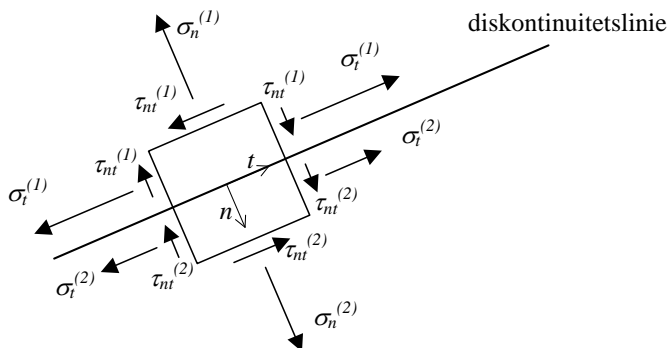
$$q = -\sigma_{\theta}(r, \theta = 0) = pe^{-\pi \tan \varphi} + c \cot \varphi (e^{-\pi \tan \varphi} - 1)$$

Løsningen er den samme som øvreværdiløsningen, dvs. den er eksakt.

## 5 Diskontinuitetslinien.

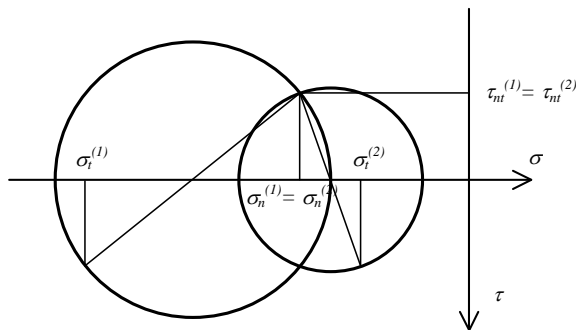
I det følgende udvikles en ny jordtryksteori, som benytter sig af spændingsdiskontinuitetslinier. En spændingsdiskontinuitetslinie er, som navnet siger, en linie eller en kurve langs hvilken spændingerne ikke er kontinuerte. I plasticitetsteorien forlanges langs sådan en linie kun, at loven om aktion og reaktion er opfyldt. I figur 5.1 kræves derfor  $\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)}$  og  $\tau_{nt}^{(1)} = \tau_{nt}^{(2)}$  mens  $\sigma_t^{(1)}$  kan være forskellig fra  $\sigma_t^{(2)}$ .

I nedreværdiløsninger skal spændingerne naturligvis tilfredsstille ligevægtsbetingelserne på begge sider af diskontinuitetslinien.



Figur 5.1: Spændingsdiskontinuitetslinien

I et  $\sigma, \tau$ -koordinatsystem vil de to spændingstilstande på hver side af diskontinuitetslinien have hver sin Mohr's cirkel, se figur 5.2. Loven om aktion og reaktion kan kun opfyldes, når de to Mohr's cirkler skærer hinanden.



Figur 5.2: Mohr's cirkler langs en diskontinuitetslinie

Brug af diskontinuitetslinier er et standardværktøj i plasticitetsteorien og anvendes både ved beregning af øvre- og nedreværdier.

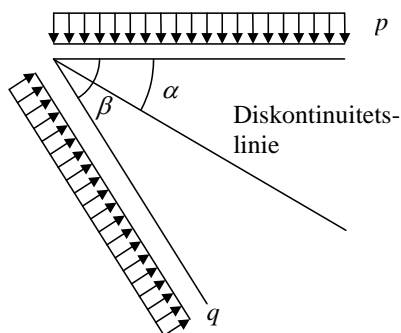
Løsninger med spændingsdiskontinuiteter ved beregning af jordtryk er bl.a. blevet benyttet af Sokolovskii [65.1], R.T. Shield [52.1] og W. F. Chen [75.1]. Sokolovskii udviklede løsningen for det simple tilfælde glat støttemur med vandret jordoverflade uden hensyntagen til egenvægt. Disse løsninger er selvfølgelig alle nedreværdiløsninger.

I det følgende behandles en række jordtryksproblemer vha. spændingsdiskontinuitetslinier. Mens anvendelsen af en diskontinuitetslinie er kendt synes den ikke tidligere at have været anvendt til udvikling af en komplet jordtryksteori. Det følgende indeholder derfor en lang række nye løsninger.

De nye løsninger er sammenlignet med eksisterende teori i kapitel 17.

Vi nøjes med at behandle problemer med aktivt jordtryk, idet det tilsvarende passive jordtryk rent formelt kan findes ved at skifte fortegn for kohæsionen og friktionsvinklen.

## 6 Glat støttemur med vandret jordoverflade



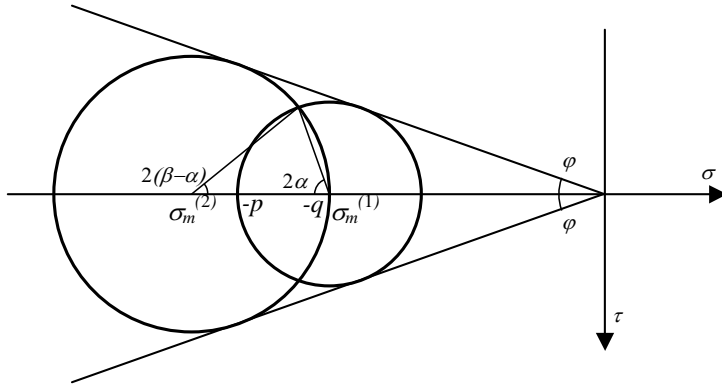
Figur 6.1: Glat støttemur med vandret overflade

Lasten er et jævnt fordelt tryk  $p$  på en vandret overflade, der medfører et jordtryk  $q$  på støttemuren. I det følgende er løsninger som nævnt regnet igennem svarende til aktivt jordtryk. Dette medfører at  $p > q$ . Vinklen mellem den vandrette overflade og væggen er  $\beta$ . Vinklen mellem den vandrette overflade og diskontinuitetslinien er  $\alpha$ . Størrelserne er vist på figur 6.1.

Fortegnsregning for spændingerne er som tidligere, dvs. træknormalspændinger regnes positive. Overfladelast og jordtryk regnes dog positive som tryknormalspændinger.

### 6.1 Friktionsjord

Løsningen uden hensynstagen til egenvægt vil bestå af to homogene spændingsfelter, som er adskilt ved en diskontinuitetslinie. Den optimale nedreværdi for en enkelt diskontinuitetslinie vil fremkomme, når begge spændingsfelter opfylder flydebetingelsen. En sådan løsning er tegnet i figur 6.2. Alle spændingstilstande, der ligger inden for flydebetingelsens skrå linier svarende til friktionsvinklen  $\varphi$ , er tilladelige. Spændingstilstande hvis Mohr's cirkler rører de skrå linier opfylder flydebetingelsen.



Figur 6.2: Mohr's cirkler. Glat støttemur med vandret overflade. Friktionsjord.

Normalspændingerne svarende til centrum for hver af de Mohr'ske cirkler i figur 6.2 kan udtrykkes ved:

$$\sigma_m^{(1)} = -\frac{p}{1 + \sin \varphi} \quad (6.1)$$

$$\sigma_m^{(2)} = -\frac{q}{1 - \sin \varphi} \quad (6.2)$$

Disse spændinger betegnes middelspændinger. På basis af kravet om kontinuitet i forskydningsspændingerne fås følgende sammenhæng mellem middelspændingerne:

$$\begin{aligned} -\sigma_m^{(1)} \sin \varphi \sin 2\alpha &= -\sigma_m^{(2)} \sin \varphi \sin(2\beta - 2\alpha) \\ \Downarrow \\ \sigma_m^{(1)} &= \sigma_m^{(2)} \frac{\sin(2\beta - 2\alpha)}{\sin 2\alpha} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Kravet om kontinuitet for normalspændingerne vinkelret på diskontinuitetslinien giver:

$$\sigma_m^{(1)} + \sigma_m^{(1)} \sin \varphi \cos 2\alpha = \sigma_m^{(2)} - \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \cos(2\beta - 2\alpha) \quad (6.4)$$

Indsættes (6.3) i (6.4) fås følgende ligning til bestemmes af  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \sigma_m^{(2)} \frac{\sin(2\beta - 2\alpha)}{\sin 2\alpha} (1 + \sin \varphi \cos 2\alpha) &= \sigma_m^{(2)} - \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \cos(2\beta - 2\alpha) \\ \Downarrow \\ (\sin 2\beta \cos 2\alpha - \cos 2\beta \sin 2\alpha)(1 + \sin \varphi \cos 2\alpha) &= \sin 2\alpha (1 - \sin \varphi (\cos 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\beta \sin 2\alpha)) \\ \Downarrow \\ \sin 2\beta \cos 2\alpha - \cos 2\beta \sin 2\alpha - \sin 2\alpha &= -\sin \varphi \sin 2\beta \\ \Downarrow \\ 2 \sin \beta \cos \beta \cos 2\alpha - (2 \cos^2 \beta - 1) \sin 2\alpha - \sin 2\alpha &= -2 \sin \varphi \sin \beta \cos \beta \\ \Downarrow \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
2 \sin \beta \cos 2\alpha - 2 \cos \beta \sin 2\alpha &= -2 \sin \varphi \sin \beta \\
\Updownarrow \\
\sin(2\alpha - \beta) &= \sin \varphi \sin \beta \\
\Updownarrow \\
\alpha &= \frac{1}{2} [\text{Arc sin}(\sin \varphi \sin \beta) + \beta]
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Det må kræves at  $\alpha < \beta$ , hvilket er tilfældet i intervallet for friktionsvinklen

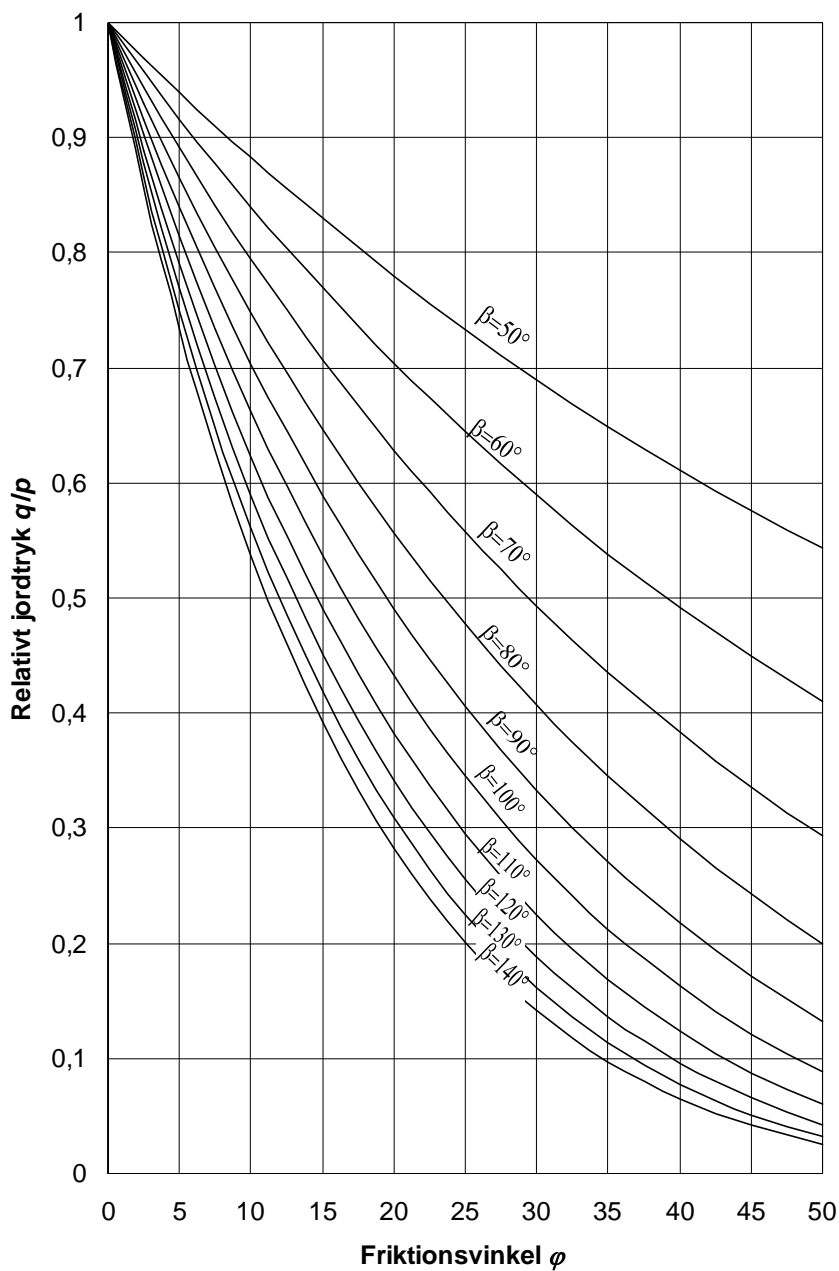
$$\varphi \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right].$$

Når vinklen  $\alpha$  er bestemt ved hjælp af (6.5), kan jordtrykket  $q$  findes ved at indsætte (6.1) og (6.2) i (6.3). Herved fås:

$$q = p \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} \tag{6.6}$$

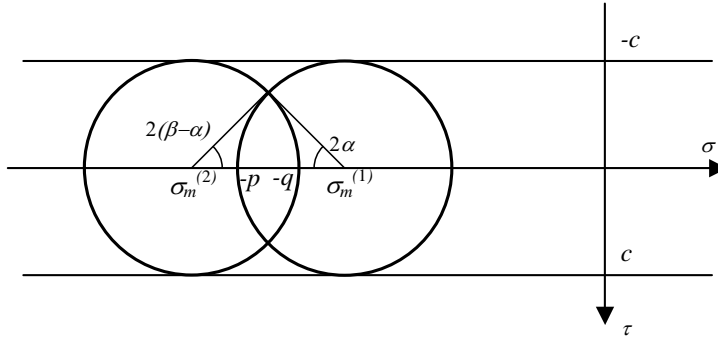
Jordtrykket  $q$  på væggen findes ved at indsætte  $\alpha$  bestemt ved (6.5) i (6.6).

På figur 6.3 er det relative jordtryk  $q/p$  vist som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$ . Kurverne er tegnet for forskellige værdier af vinklen  $\beta$ .



Figur 6.3: Det relative jordtryk  $q/p$  på glat støttemur for friktionsjord som funktion af friktionsvinklen  $\phi$  ved anvendelse af én diskontinuitetslinje.

## 6.2 Kohæsionsjord



Figur 6.4: Mohr's cirkler. Glat støttemur med vandret jordoverflade. Kohæsionsjord.

I figur 6.4 er de Mohr'ske cirkler for kohæsionsjord tegnet. Alle spændingstilstande svarende til Mohr's cirkler mellem de to vandrette linier i afstanden  $c$  fra  $\sigma$ -aksen er tilladelige. Spændingstilstande, hvis Mohr'ske cirkler rører de to linier opfylder flydebetingelsen.  $c$  betegnes som tidligere nævnt kohæsionen. Middelspændingerne er:

$$\sigma_m^{(1)} = -p + c \quad (6.7)$$

$$\sigma_m^{(2)} = -p - c \quad (6.8)$$

Kontinuitetskravet for forskydningsspændingerne i diskontinuitetslinien giver:

$$-c \sin 2(\beta - \alpha) = -c \sin 2\alpha \quad (6.9)$$

Heraf ses at diskontinuitetslinien må ligge i halveringslinien for vinklen  $\beta$ , dvs.:

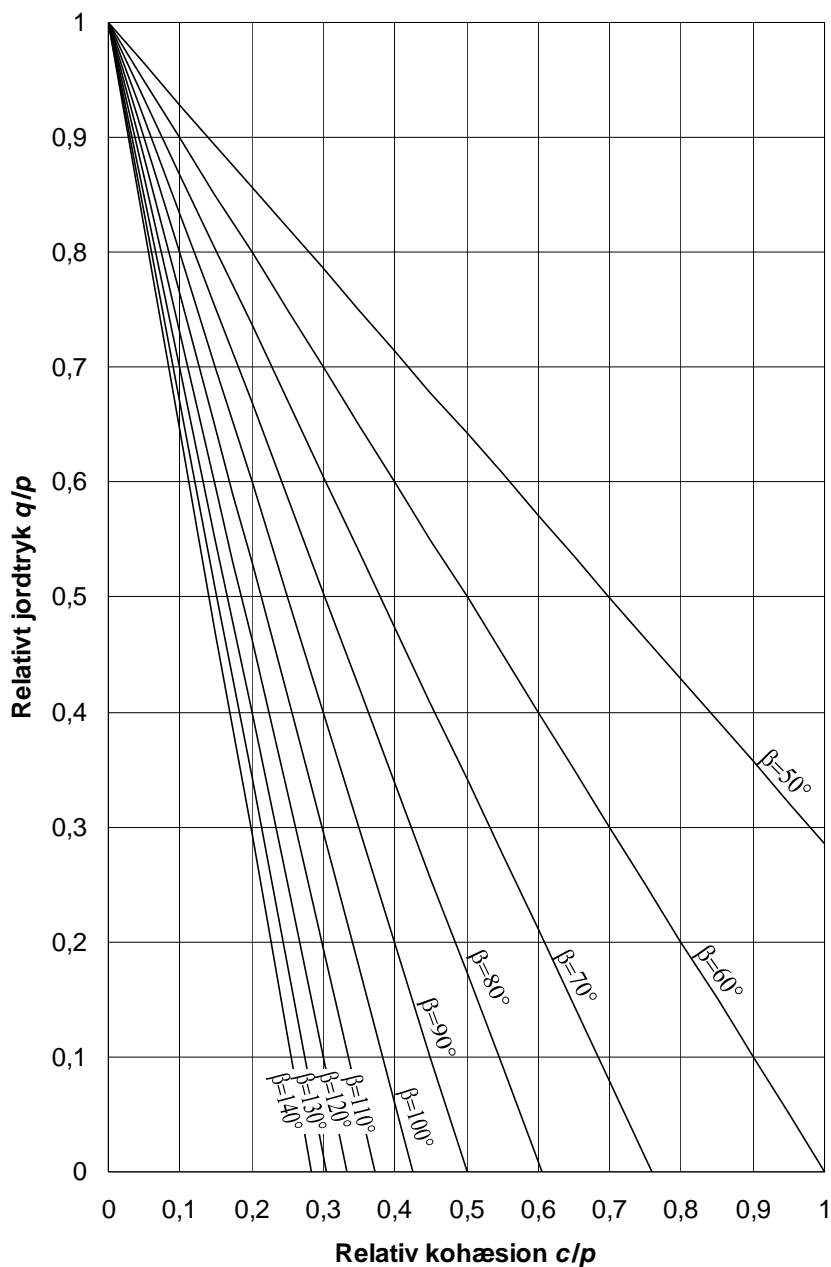
$$\alpha = \frac{1}{2} \beta \quad (6.10)$$

Kontinuitetskravet for normalspændingerne vinkelret på diskontinuitetslinien giver:

$$\sigma_m^{(1)} - c \cos 2\alpha = \sigma_m^{(2)} + c \cos 2(\beta - \alpha) \quad (6.11)$$

der, når  $\alpha$  fra formel (6.10) indsættes, fører til:

$$\sigma_m^{(1)} - c \cos \beta = \sigma_m^{(2)} + c \cos \beta \quad (6.12)$$



Figur 6.5: Det relative jordtryk  $q/p$  på glat støttemur for kohæsionsjord som funktion af den relative kohæsion  $c/p$  ved anvendelse af én diskontinuitetslinie

Indsættes (6.7) og (6.8) i (6.12) fås:

$$-p + c - c \cos \beta = -q - c + c \cos \beta$$

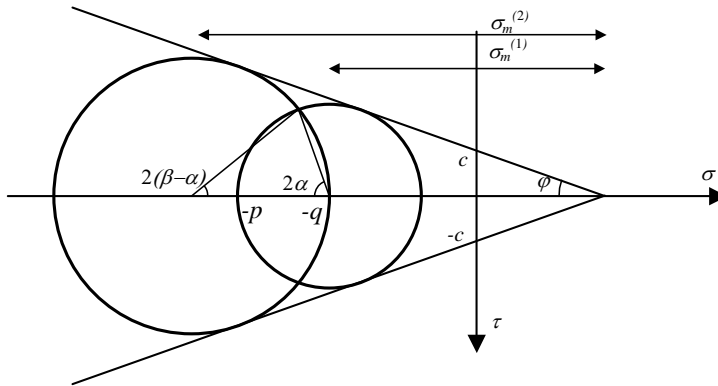
$\Updownarrow$

$$q = p - 2c(1 - \cos \beta) \quad (6.13)$$

herved er det aktive jordtryk  $q$  på væggen bestemt.

I figur 6.5 er det relative jordtryk  $q/p$  vist som funktion af den relative kohæsion  $c/p$ . Kurverne er tegnet for forskellige værdier af vinklen  $\beta$ .

### 6.3 Friktions- og kohæsionsjord



Figur 6.6: Mohr's cirkler. Glat væg med vandret jordoverflade. Friktions- og kohæsionsjord

Løsningen, når der er tale om jord med både friktion og kohæsion er vist i figur 6.6. Den svarer til løsningen i figur 6.2, idet kohæsionen  $c$  blot flytter koordinatsystemet. Middelspændingerne  $\sigma_m$  er her defineret som afstanden fra centrum for cirklerne til spidsen af flydebetingslinjen, som angivet i figur 6.6. Herved kommer løsningen til at ligne løsningen for friktionjord. Disse middelspændinger, der regnes positive, bliver:

$$\sigma_m^{(1)} = \frac{p + c \cot \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (6.14)$$

$$\sigma_m^{(2)} = \frac{q + c \cot \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (6.15)$$

Kontinuitetsbetingelsen for forskydningsspændingerne i diskontinuitetslinien giver betingelsen:

$$-\sigma_m^{(1)} \sin \varphi \sin 2\alpha = -\sigma_m^{(2)} \sin \varphi \sin(2\beta - 2\alpha)$$

$\Updownarrow$

$$\sigma_m^{(1)} = \sigma_m^{(2)} \frac{\sin(2\beta - 2\alpha)}{\sin 2\alpha} \quad (6.16)$$

Kontinuitetsbetingelsen for normalspændingerne vinkelret på diskontinuitetslinien giver betingelsen:

$$c \cot \varphi - \sigma_m^{(1)} - \sigma_m^{(1)} \sin \varphi \cos 2\alpha = c \cot \varphi - \sigma_m^{(2)} + \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \cos(2\beta - 2\alpha)$$

$$\Updownarrow$$

$$\sigma_m^{(1)} + \sigma_m^{(1)} \sin \varphi \cos 2\alpha = \sigma_m^{(2)} - \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \cos(2\beta - 2\alpha) \quad (6.17)$$

Ligningerne (6.16) og (6.17) er identiske med de tilsvarende for friktionsjord (6.3) og (6.4). Da disse ligninger bestemmer beliggenheden af diskontinuitetslinien fås, at hældningen  $\alpha$  er den samme som i tilfældet for ren friktionsjord, dvs.:

$$\alpha = \frac{1}{2} [\text{Arc sin}(\sin \varphi \sin \beta) + \beta] \quad (6.18)$$

Når vinklen  $\alpha$  er kendt kan jordtrykket findes ved indsætning af (6.14) og (6.15) i (6.16):

$$q = (p + c \cot \varphi) \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} - c \cot \varphi \quad (6.19)$$

Det aktive jordtryk  $q$  på væggen findes ved at bestemme  $\alpha$  udfra (6.18) hvorefter  $q$  bestemmes af (6.19).

Jordtrykket (6.19) kan deles op i to dele  $q_p$  og  $q_c$  stammende fra henholdsvis overfladelasten  $p$  og kohæsionen  $c$ :

$$q_p = p \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} \quad (6.20)$$

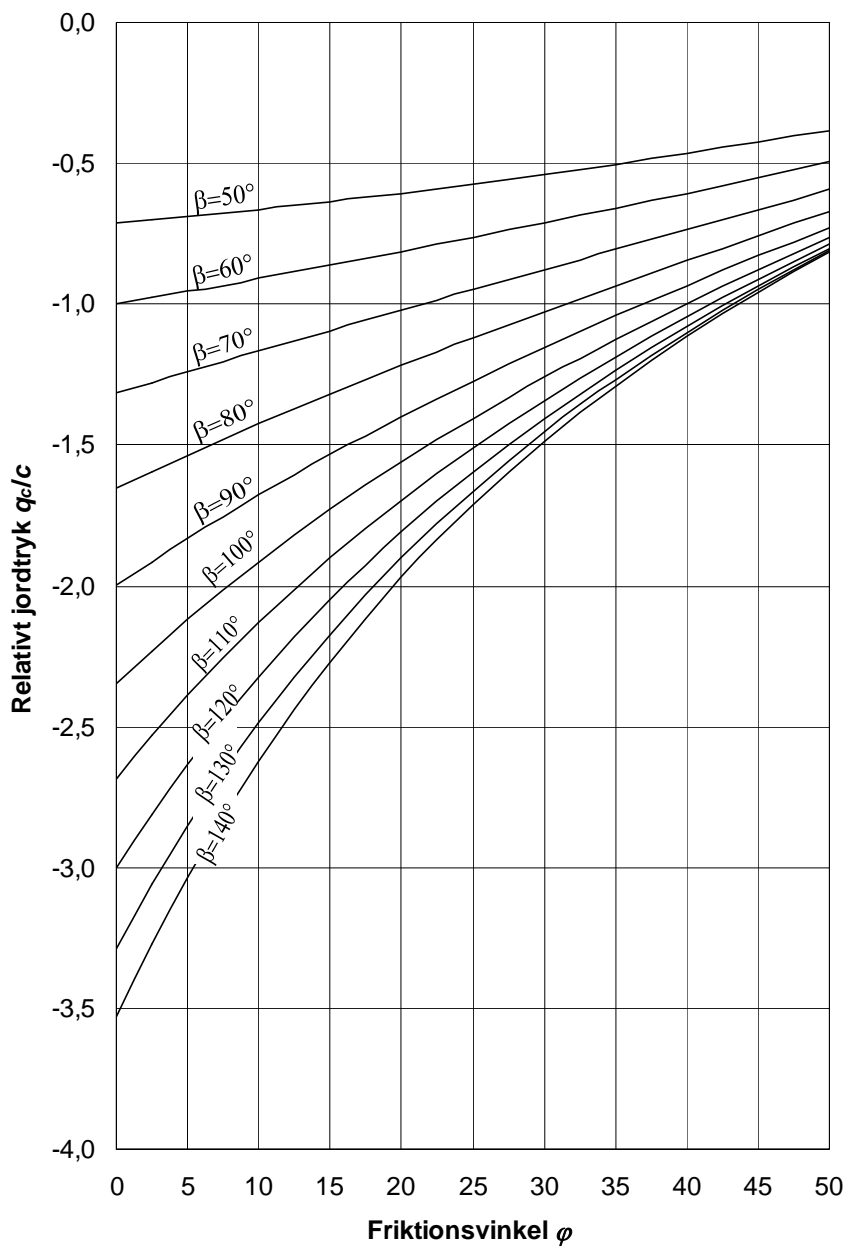
$$q_c = c \cot \varphi \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} - c \cot \varphi \quad (6.21)$$

Figur 6.3 kan benyttes til aflæsning af det relative jordtryk fra overfladelasten  $p$ ,  $q_p/p$  efter formel (6.20) som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$ , idet denne formel er identisk med formel (6.6), der er løsningen for friktionsjord.

Det relative jordtryk fra kohæsionen  $c$ ,  $q_c/p$  fra formel (6.21) kan aflæses på figur 6.7, som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$ . Kurverne er tegnet for forskellige værdier af vinklen  $\beta$ .

$q_c$  er ikke defineret for  $\varphi=0$ , dvs. i tilfældet af ren kohæsionsjord.

Bemærk at  $q_c/p$  har negative værdier overalt.



Figur 6.7: Det relative jordtryk  $q_c/c$  på glat støttemur for kohæsions- og friktionsjord som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$  ved anvendelse af én diskontinuitetslinie





## 7 Ru støttemur med vandret jordoverflade

Ruheden for en støttemur bestemmes ved vægfriktionsvinklen  $\delta$  og adhæsionen  $a$ . Vi forudsætter at Coulomb's brudbetingelse også kan benyttes for skillefladen mellem væg og jord. Den maksimale forskydningsstyrke i skillefladen mellem væg og jord kan herved skrives:

$$\tau = \pm(-\sigma \tan \delta + a) \quad (7.1)$$

Det forudsættes at

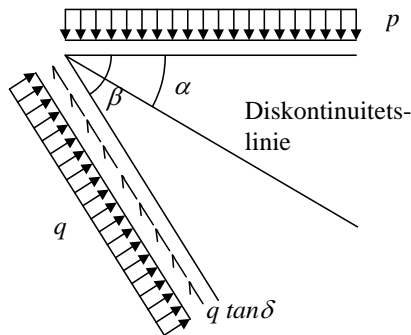
$$\frac{\tan \delta}{\tan \varphi} = \frac{a}{c} \quad (7.2)$$

Forholdet  $\frac{\tan \delta}{\tan \varphi}$  betegnes ruhedsforholdet.

Formel (7.2) har selvfølgelig kun mening i de tilfælde, hvor friktionsvinklen og kohæsionen begge er forskellige fra nul.

Vægfriktionsvinklen og adhæsionen kan naturligvis aldrig blive større end de respektive jordstyrkeparametre, dvs.:

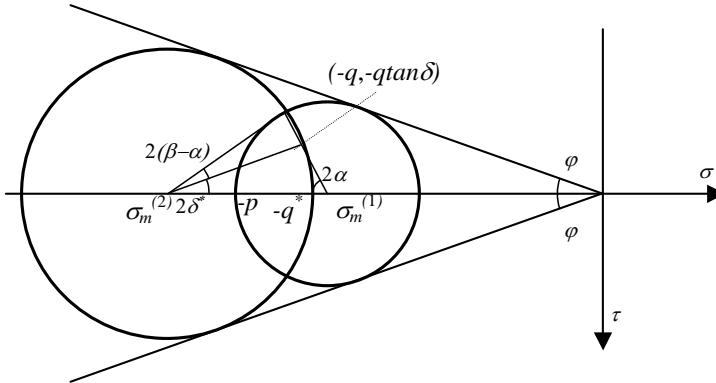
$$\begin{aligned} \delta &\leq \varphi \\ a &\leq c \end{aligned} \quad (7.3)$$



Figur 7.1: Ru støttemur med vandret jordoverflade

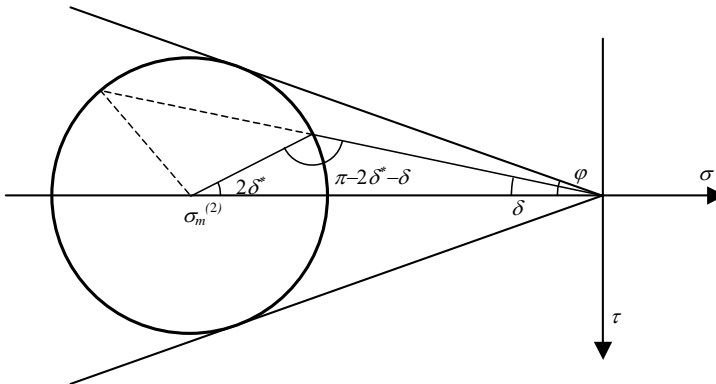
Som vist i figur 7.1 ligger diskontinuitetslinien under en vinkel  $\alpha$  målt fra den frie jordoverflade, der er belastet med trykspændingen  $p$ . Jordtrykket er bestemt ved en tryknormalspænding  $q$  og en forskydningsspænding  $q \tan \delta$ , for hvilke fortegneregningen fremgår af figuren.

## 7.1 Friktionsjord



Figur 7.2: Mohr's cirkler. Ru væg med vandret jordoverflade. Friktionsjord

I figur 7.2 er de Mohr'ske cirkler tegnet. Som det ses, er der indført en størrelse  $\delta^*$ , som er en funktion af vægfriktionsvinklen  $\delta$ . Endvidere er jordtrykket på væggen givet ved en tryknormalspænding  $q$  og en forskydningspænding  $-q \tan \delta$ . Hovedspændingen ved væggen er  $-q^*$ . Hovedsnittene ved væggen danner altså en vinkel med væggen.



Figur 7.3: Sammenhæng imellem vinklerne  $2\delta^*$  og  $\delta$

I figur 7.3 er sammenhængen mellem vinklerne  $2\delta^*$  og  $\delta$  vist. Vinklen  $2\delta^*$  er bestemt når vinklen  $\delta$  er kendt. Opstilles sinusrelationen for trekanten, der har vinklerne  $\delta$ ,  $\pi - 2\delta^* - \delta$  og  $2\delta^*$  fås:

$$\frac{\sigma_m^{(2)} \sin \varphi}{\sin \delta} = \frac{\sigma_m^{(2)}}{\sin(\pi - 2\delta^* - \delta)} \quad (7.4)$$

Det ses, at middelspændingen  $\sigma_m^{(2)}$  kan forkortes bort fra ligningen, hvorved vi finder:

$$\sin(\pi - 2\delta^* - \delta) = \sin(2\delta^* + \delta) = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \quad (7.5)$$

Det ses på figur 7.3 at linien, som er bestemt af vægfriktionsvinklen  $\delta$ , skærer den Mohr'ske cirkel to steder. Dvs. at der findes to løsninger. Løsningen for den fuldt optrukne linie er vist i (7.4). Denne løsning svarer til første og tredje led i (7.5). Løsningen for den punkterede linie svarer til andet og tredje led i (7.5). Den brugbare løsning er den i figuren viste fuldt optrukne linie:

$$\delta^* = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \right) - \delta \right] \quad (7.6)$$

Middelspændingerne i figur 7.2 kan udtrykkes ved:

$$\sigma_m^{(1)} = -\frac{p}{1 + \sin \varphi} \quad (7.7)$$

$$\sigma_m^{(2)} = -\frac{q^*}{1 - \sin \varphi} \quad (7.8)$$

Kontinuitetsbetingelsen for forskydningsspændingerne i diskontinuitetslinien giver betingelsen:

$$\begin{aligned} \sigma_m^{(1)} \sin \varphi \sin 2\alpha &= \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*) \\ \Updownarrow \\ \sigma_m^{(1)} &= \sigma_m^{(2)} \frac{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)}{\sin 2\alpha} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Kontinuitetsbetingelsen for normalspændingerne giver:

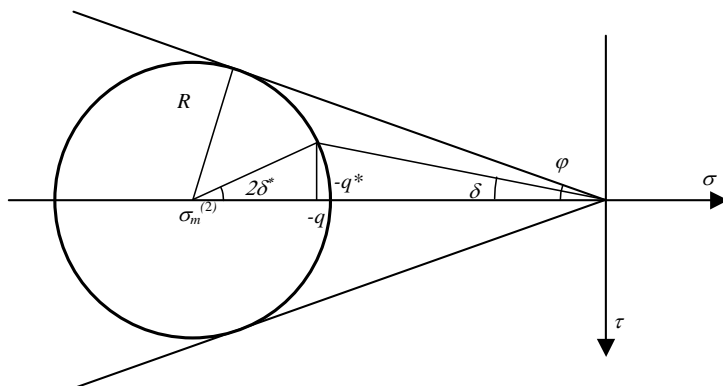
$$\sigma_m^{(1)} + \sigma_m^{(1)} \sin \varphi \cos 2\alpha = \sigma_m^{(2)} - \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \cos(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*) \quad (7.10)$$

Ved indsættelse af (7.9) i (7.10) fås en ligning til bestemmelse af  $\alpha$ . Denne ligning er identisk med ligning (6.5), idet  $\beta$  formelt sættes lig  $\beta + \delta^*$ . Hermed fås følgende udtryk for vinklen  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin}(\sin \varphi \sin(\beta + \delta^*)) + \beta + \delta^* \right] \quad (7.11)$$

Når vinklen  $\alpha$  er bestemt ud fra (7.11), kan tryknormalspændingen  $q^*$  findes ved indsætte (7.7) og (7.8) i (7.9). Herved fås:

$$q^* = p \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} \quad (7.12)$$



Figur 7.4: Omregning fra  $q^*$  til  $q$

Den Mohr'ske cirkel i figur 7.4 er tegnet ud fra middelspændingen  $\sigma_m^{(2)}$  og Radius  $R$ . Ved flydning kan Radius  $R$  bestemmes ved middelspændingen  $\sigma_m^{(2)}$  og friktionsvinklen  $\varphi$ . Vi får:

$$R = -\sigma_m^{(2)} \sin \varphi \quad (7.13)$$

Vha. figur 7.4 fås følgende formel for  $q$ :

$$q = -\sigma_m^{(2)} - R \cos 2\delta^* \quad (7.14)$$

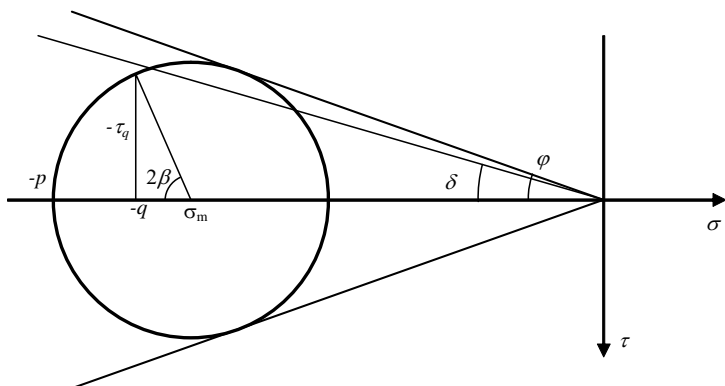
Idet middelspændingen  $\sigma_m^{(2)}$  er bestemt ved (7.8) og  $R$  ved (7.13), kan jordtrykket på væggen  $q$  bestemmes ved:

$$q = q^* \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (7.15)$$

Indsættes udtrykket for  $q^*$ , (7.12), fås den endelige formel for jordtrykket på væggen:

$$q = p \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} \quad (7.16)$$

Løsningen forudsætter selvfølgelig at  $\alpha < \beta$ , idet diskontinuitetslinien i modsat fald ligger udenfor jorden, hvilket ikke kan lade sig gøre. I tilfældet  $\alpha \geq \beta$  kan jordtrykket bestemmes ud fra den homogene spændingstilstand i området svarende til hele vinklen  $\beta$ . Løsningen findes ved blot at finde spændingskomponenterne i et snit, der danner vinklen  $\beta$  med et lodret snit:



Figur 7.5: Beregning af  $q$  i tilfældet  $\alpha > \beta$ .

Som det ses af figur 7.5, vil ruheden ved væggen ikke være udnyttet i dette tilfælde. Spændingerne i vandrette og lodrette snit er hovedspændinger, henholdsvis  $\sigma_2$  og  $\sigma_1$ :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -p \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \\ \sigma_2 &= -p\end{aligned}\quad (7.17)$$

Vha. transformationsformlerne for plane spændingstilstande fås jordtrykket til:

$$q = -\sigma_1 \sin^2 \beta - \sigma_2 \cos^2 \beta = p \left( \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right) = p \frac{1 + \sin \varphi \cos 2\beta}{1 + \sin \varphi} \quad (7.18)$$

Forskydningsspændingen bliver:

$$\tau_q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\beta = -p \sin 2\beta \left( \frac{\sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right) = -p \frac{\sin \varphi \sin \beta}{1 + \sin \varphi} \quad (7.19)$$

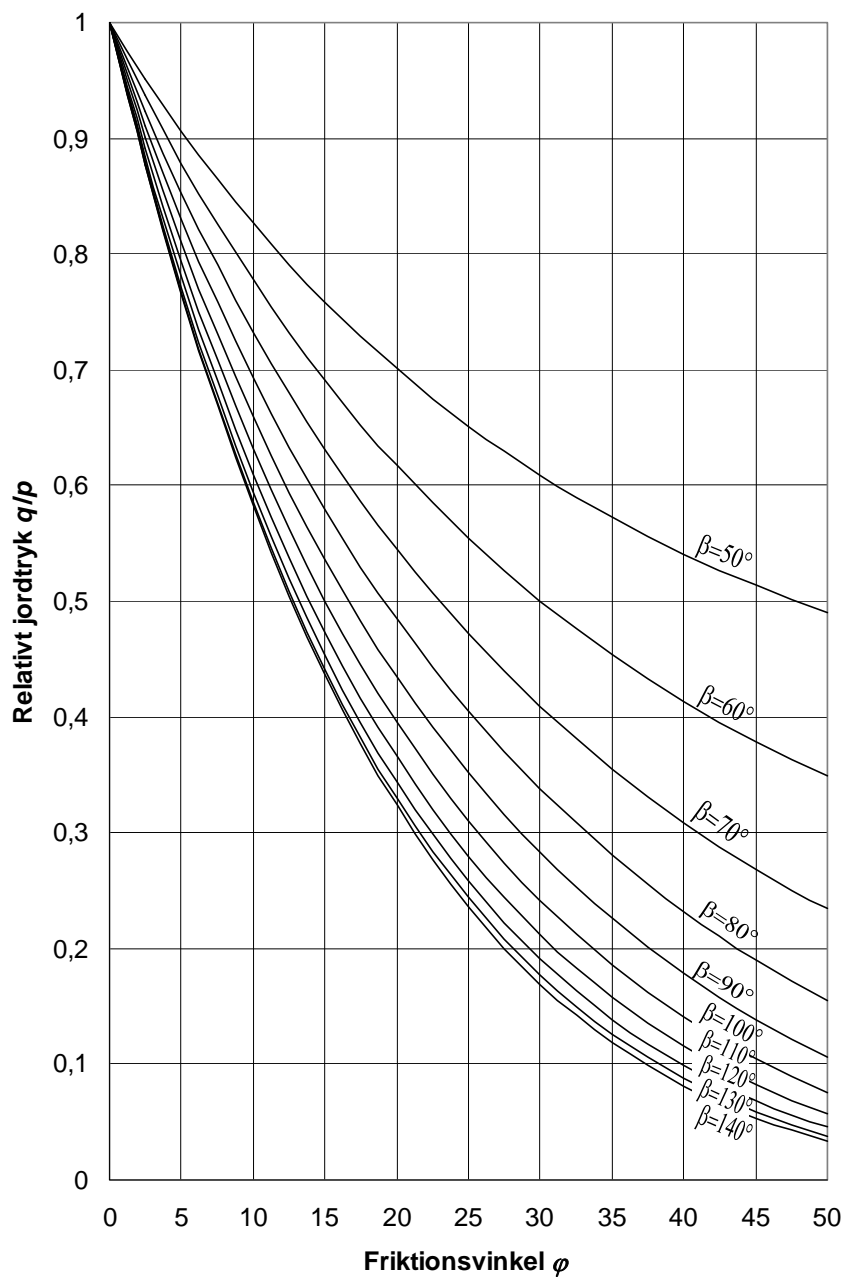
### 7.1.1 Jordtryk ved ru væg, $\delta = \varphi$

I tilfælde af maksimal ruhed  $\delta = \varphi$  fås følgende ligning til bestemmelse af  $\delta^*$ :

$$\delta^* = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (7.20)$$

Vinklen  $\alpha$  til diskontinuitetslinien kan bestemmes ved:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \sin \varphi \sin \left( \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right) + \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right] \quad (7.21)$$



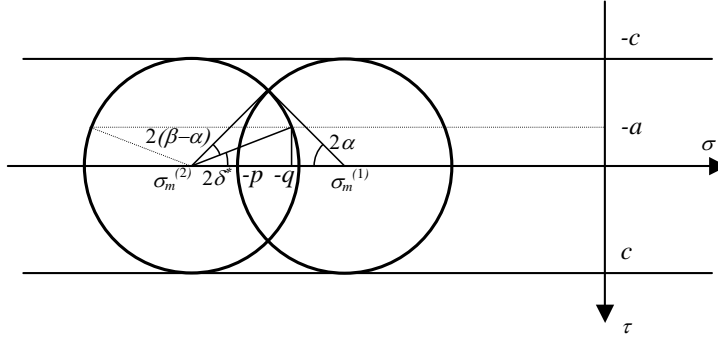
Figur 7.6: Det relative jordtryk  $q/p$  på ru støttemur for friktionsjord som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$  ved anvendelse af én diskontinuitetslinje

Jordtrykket på væggen (7.16) kan reduceres til:

$$q = p \frac{1 - \sin^2 \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha + \varphi - 2\beta)} \quad (7.22)$$

I figur 7.6 er det relative jordtryk  $q/p$  tegnet for vægge med maksimal ruhed. Kurverne er tegnet for forskellige værdier af vinklen  $\beta$ .

## 7.2 Kohæsionsjord



Figur 7.7: Mohr's cirkler. Ru væg med vandret jordoverflade. Kohæsionsjord

I figur 7.7 er løsningen i tilfælde af kohæsionsjord vist. Ruheden for væggen er givet ved adhæsionen  $a$ . Forskydningsspændingen ved væggen er  $-a$ , jf. fortegneregningen fra figur 7.1. Udtrykkes forskydningsspændingen ved  $c$  og  $\delta^*$  fås følgende ligning til bestemmelse af  $\delta^*$ :

$$-c \sin(2\delta^*) = -a \quad (7.23)$$

der giver:

$$\delta^* = \frac{1}{2} \text{Arc sin} \left( \frac{a}{c} \right) \quad (7.24)$$

Middelspændingerne bliver i dette tilfælde:

$$\sigma_m^{(1)} = -p + c \quad (7.25)$$

$$\sigma_m^{(2)} = -q^* - c \quad (7.26)$$

Kontinuitetsbetingelsen for forskydningsspændingerne i diskontinuitetslinien giver betingelsen:

$$-c \sin(2\beta + 2\delta^* - 2\alpha) = -c \sin 2\alpha \quad (7.27)$$

Det ses, at diskontinuitetslinien under vinklen  $\alpha$  må ligge i halveringslinien for vinklen  $\beta + \delta^*$ , dvs.:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \delta^*) \quad (7.28)$$

Formlen er kun gyldig såfremt  $\alpha$  findes mindre end  $\beta$ , da diskontinuitetslinien ellers vil ligge udenfor jorden. Vha. (7.28) fås følgende krav til  $\delta^*$ :

$$\delta^* < \beta \quad (7.29)$$

Kontinuitetsbetingelsen for normalspændingerne vinkelret på diskontinuitetslinien giver:

$$\sigma_m^{(1)} - c \cos 2\alpha = \sigma_m^{(2)} + c \cos(2\beta + 2\delta^* - 2\alpha)$$

Indsættes  $\alpha$  fra (7.28) fås:

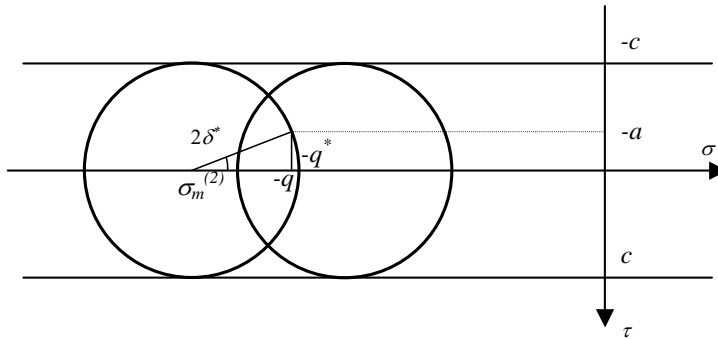
$$\sigma_m^{(1)} - c \cos(\beta + \delta^*) = \sigma_m^{(2)} + c \cos(\beta + \delta^*)$$

$\Updownarrow$

$$-p + c - c \cos(\beta + \delta^*) = -q^* - c + c \cos(\beta + \delta^*)$$

$\Updownarrow$

$$q^* = p - 2c(1 - \cos(\beta + \delta^*)) \quad (7.30)$$



Figur 7.8: Omregning fra  $q^*$  til  $q$

Jordtrykket  $q$  på væggen kan ifølge figur 7.8 udtrykkes ved:

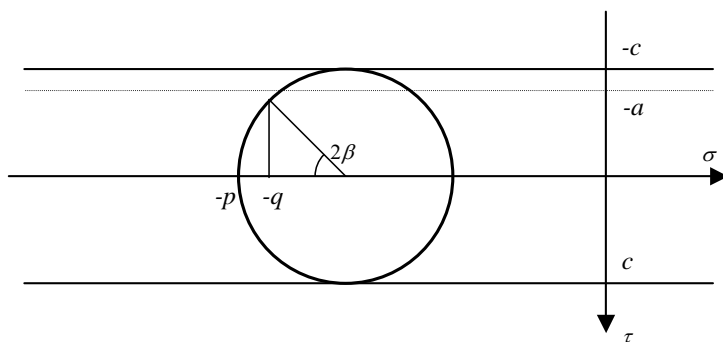
$$q = -\sigma_m^{(2)} - c \cos(2\delta^*) \quad (7.31)$$

Indsættes de kendte størrelser,  $\sigma_m^{(2)}$  fra (7.26) og  $q^*$  fra (7.30), fås:

$$q = p - c(1 + \cos(2\delta^*) - 2\cos(\beta + \delta^*)) \quad (7.32)$$

Såfremt (7.29) ikke er opfyldt vil ruheden ikke blive fuldt udnyttet, og spændingsfeltet er homogent med den Mohr'ske cirkel vist i figur 7.9.





Figur 7.9: Beregning af  $q$  i tilfældet  $\delta^* \geq \beta$

Jordtrykket bliver:

$$q = p - c(1 - \cos(2\beta)) \quad (7.33)$$

### 7.2.1 Jordtryk ved ru væg, $a=c$

I tilfælde af maksimal ruhed, dvs.  $a=c$ , fås at vinklen  $\delta^*$  er givet ved:

$$\delta^* = \frac{\pi}{4} \quad (7.34)$$

Derved bliver  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (7.35)$$

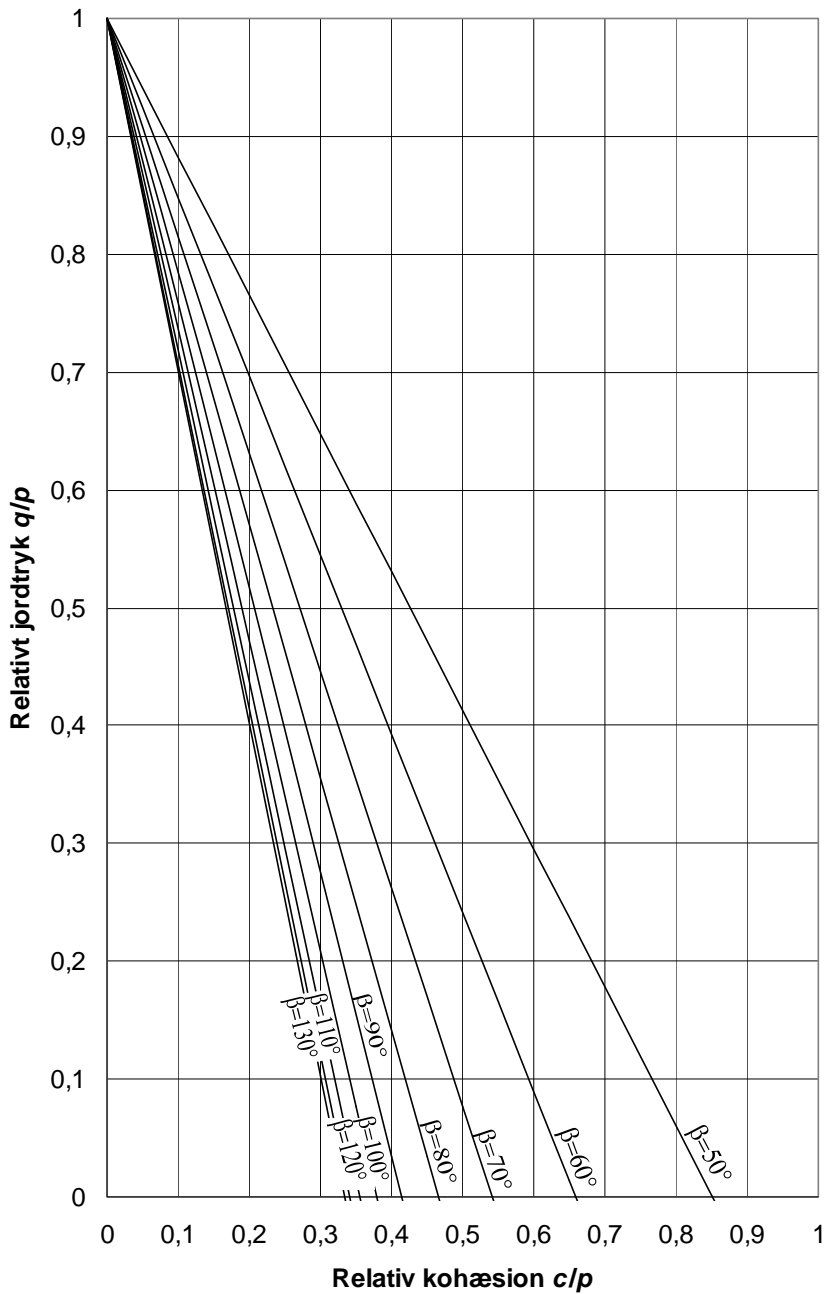
Kravet for en tilladelige løsning, dvs. at (7.29) er opfyldt, kommer til at lyde:

$$\beta > \frac{\pi}{4} \quad (7.36)$$

Endelig fås jordtrykket til:

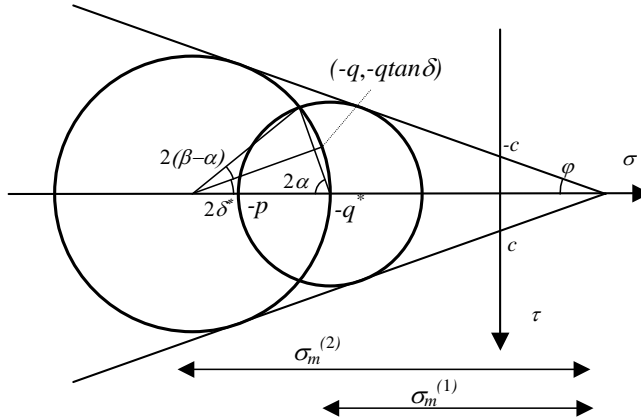
$$q = p - c \left( 1 - 2 \cos \left( \beta + \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (7.37)$$

I figur 7.10 er det relative jordtryk  $q/p$  vist som funktion af den relative kohæsion  $c/p$ . Kurverne er tegnet for forskellige værdier af vinklen  $\beta$ .



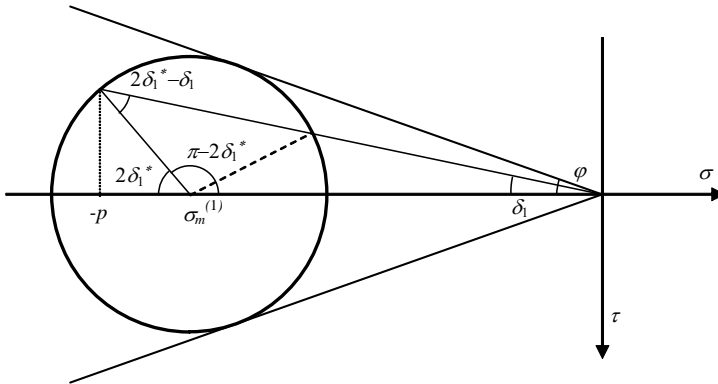
Figur 7.10: Det relative jordtryk  $q/p$  på ru støttemur for kohæsionsjord som funktion af den relative kohæsion  $c/p$  ved anvendelse af én diskontinuitetslinie

### 7.3 Friktions- og kohæsionsjord



Figur 7.11: Mohr's cirkler. Ru væg med vandret jordoverflade. Friktions- og kohæsionsjord

I figur 7.11 er de Mohr'ske cirkler tegnet i tilfældet, hvor jorden både har friktion og kohæsion. Jordtrykket på væggen er bestemt ved en tryknormalspænding  $q$  og en forskydningsspænding  $qtan\delta$ . Middelspændingerne er i dette tilfælde ligesom i afsnit 6.3 defineret som afstanden fra centrum af cirklerne til spidsen af flydebetingelsen. Disse middelspændinger er derfor  $c \cot\phi$  minus den virkelige middelspænding, som angivet i figur 7.12. Afstandene  $\sigma_m^{(1)}$  og  $\sigma_m^{(2)}$  regnes her positive. Der indføres en vinkel  $\delta^*$  og en tryknormalspænding  $q^*$  som vist i figuren.



Figur 7.12: Sammenhæng imellem vinklerne  $2\delta^*$  og  $\delta$

I figur 7.12 er sammenhængen mellem vinklerne  $2\delta^*$  og  $\delta$  vist. Væggens ruhed, bestemt ved vægfriktionsvinklen  $\delta$  og adhæsionen  $a$ , anses for at være kendt. Af figuren ses umiddelbart, at antagelsen, (7.2), vedr. ruhedsforholdet er opfyldt.

Vinklen  $2\delta^*$  er en funktion af vinklen  $\delta$ . Opstilles sinusrelationen for trekanten i figur 7.12, der har vinklerne  $\delta$ ,  $\pi - 2\delta^* - \delta$  og  $2\delta^*$ , fås:

$$\frac{\sigma_m^{(2)} \sin \varphi}{\sin \delta} = \frac{\sigma_m^{(2)}}{\sin(\pi - 2\delta^* - \delta)} \quad (7.38)$$

Det ses, at spændingen  $\sigma_m^{(2)}$  kan forkortes bort, hvorved vi får:

$$\sin(\pi - 2\delta^* - \delta) = \sin(2\delta^* + \delta) = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \quad (7.39)$$

Det ses på figur 7.12 at linien, som er bestemt af vægfriktionsvinklen  $\delta$  og adhæssionen  $a$ , skærer den Mohr'ske cirkel to steder. Dvs. at der findes to løsninger. Løsningen for den fuldt optrukne linie er vist i (7.38). Denne løsning svarer til første og tredje led i (7.39). Løsningen for den punkterede linie svarer til andet og tredje led i (7.39). Den brugbare løsning er den i figuren viste fuldt optrukne linie:

$$\delta^* = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \right) - \delta \right] \quad (7.40)$$

Middelspændingerne defineret som ovenfor bliver:

$$\sigma_m^{(1)} = \frac{p + c \cot \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (7.41)$$

$$\sigma_m^{(2)} = \frac{q^* + c \cot \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (7.42)$$

Kontinuitetsbetingelsen for forskydningspændingerne i diskontinuitetslinien giver:

$$\begin{aligned} -\sigma_m^{(1)} \sin \varphi \sin 2\alpha &= -\sigma_m^{(2)} \sin \varphi \sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*) \\ \Updownarrow \\ \sigma_m^{(1)} &= \sigma_m^{(2)} \frac{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)}{\sin 2\alpha} \end{aligned} \quad (7.43)$$

Kontinuitetsbetingelsen for normalspændingerne giver:

$$\sigma_m^{(1)} + \sigma_m^{(1)} \sin \varphi \cos 2\alpha = \sigma_m^{(2)} - \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \cos(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*) \quad (7.44)$$

Indsættes (7.43) i (7.44) fås en ligning til bestemmelse af  $\alpha$ :

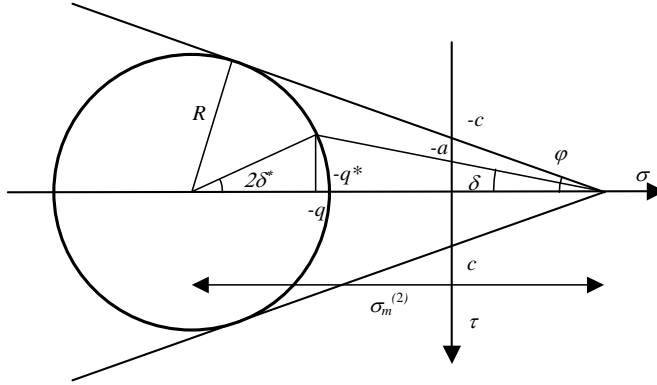
$$\begin{aligned} \sigma_m^{(2)} \frac{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)}{\sin 2\alpha} (1 + \sin \varphi \cos 2\alpha) \\ = \sigma_m^{(2)} - \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \cos(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*) \end{aligned} \quad (7.45)$$

Da denne ligning er identisk med den tilsvarende ligning for friktionsjord, fås samme løsning for  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin}(\sin \varphi \sin(\beta + \delta^*)) + \beta + \delta^* \right] \quad (7.46)$$

Når vinklen  $\alpha$  er kendt ud fra (7.46), kan normalspændingen  $q^*$  findes ved indsætte (7.41) og (7.42) i (7.43). Herved fås:

$$q^* = (p + c \cot \varphi) \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} - c \cot \varphi \quad (7.47)$$



Figur 7.13: Omregning fra  $q^*$  til  $q$

Den Mohr'ske cirkel i figur 7.13 er bestemt ved middelspændingen  $\sigma_m^{(2)}$  og Radius  $R$ . Ved flydning kan radius  $R$  udtrykkes ved spændingen  $\sigma_m^{(2)}$  og friktionsvinklen  $\varphi$ . Vi får:

$$R = \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \quad (7.48)$$

Vha. figur 7.13 fås følgende formel for  $q$ :

$$q = \sigma_m^{(2)} - R \cos 2\delta^* - c \cot \varphi \quad (7.49)$$

Idet  $\sigma_m^{(2)}$  er givet ved (7.42) og  $R$  ved (7.48), kan jordtrykket på væggen  $q$  bestemmes ved:

$$q = (q^* + \cot \varphi) \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - c \cot \varphi \quad (7.50)$$

Indsættes udtrykket for  $q^*$ , (7.47), fås den endelige formel for jordtrykket på væggen:

$$q = (p + c \cot \varphi) \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} - c \cot \varphi \quad (7.51)$$

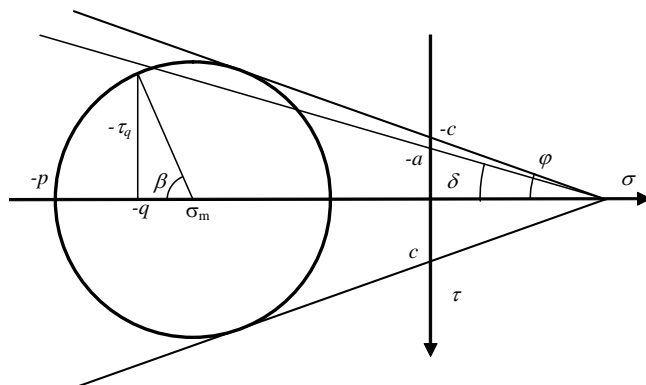
Jordtrykket kan deles op i to dele, et stammende fra overfladelasten  $p$  og et fra kohæsionen  $c$ . Formlerne for de to dele, hhv.  $q_p$  og  $q_c$  bliver:

$$q_p = p \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} \quad (7.52)$$

$$q_c = c \cot \varphi \left( \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} - 1 \right) \quad (7.53)$$

Løsningen for bidraget fra overfladelasten  $p$ , (7.52), er identisk med løsningen for friktionsjord, (7.16).

Løsningen forudsætter selvfølgelig igen at  $\alpha < \beta$ . Såfremt dette ikke er tilfælde, er jordtrykket fra overfladelasten  $p$  bestemt ved den homogene spændingstilstand i vinklen  $\beta$ . Løsningen findes ved at bestemme spændingskomposanterne i et snit under vinklen  $\beta$  med vandret som vist i figur 7.14:



Figur 7.14: Beregning af  $q$  i tilfælde af  $\alpha > \beta$ .

Som det ses af figur 7.14, vil ruheden ved væggen ikke være fuldt udnyttet. Hovedspændingerne i lodrette og vandrette snit er hhv.:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -(p + c \cot \varphi) \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} + c \cot \varphi \\ \sigma_2 &= -p\end{aligned}\quad (7.54)$$

Vha. transformationsformlerne for plane spændingstilstande findes jordtrykket til:

$$q = -\sigma_1 \sin^2 \beta - \sigma_2 \cos^2 \beta = p \frac{1 + \sin \varphi \cos 2\beta}{1 + \sin \varphi} - c \frac{2 \cos \varphi \sin^2 \beta}{1 + \sin \varphi} \quad (7.55)$$

Forskydningsspændingen er givet ved:

$$\tau_q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\beta = -p \frac{\sin \varphi \sin 2\beta}{1 + \sin \varphi} - c \frac{\cos \varphi \sin 2\beta}{1 + \sin \varphi} \quad (7.56)$$

### 7.3.1 Jordtryk for ru væg, $\delta = \varphi$ og $a = c$ .

I tilfælde af maksimal ruhed,  $\delta = \varphi$  og  $a = c$ , fås følgende udtryk for  $\delta^*$ :

$$\delta^* = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (7.57)$$

Vinklen  $\alpha$  til diskontinuitetslinien bestemmes ved:

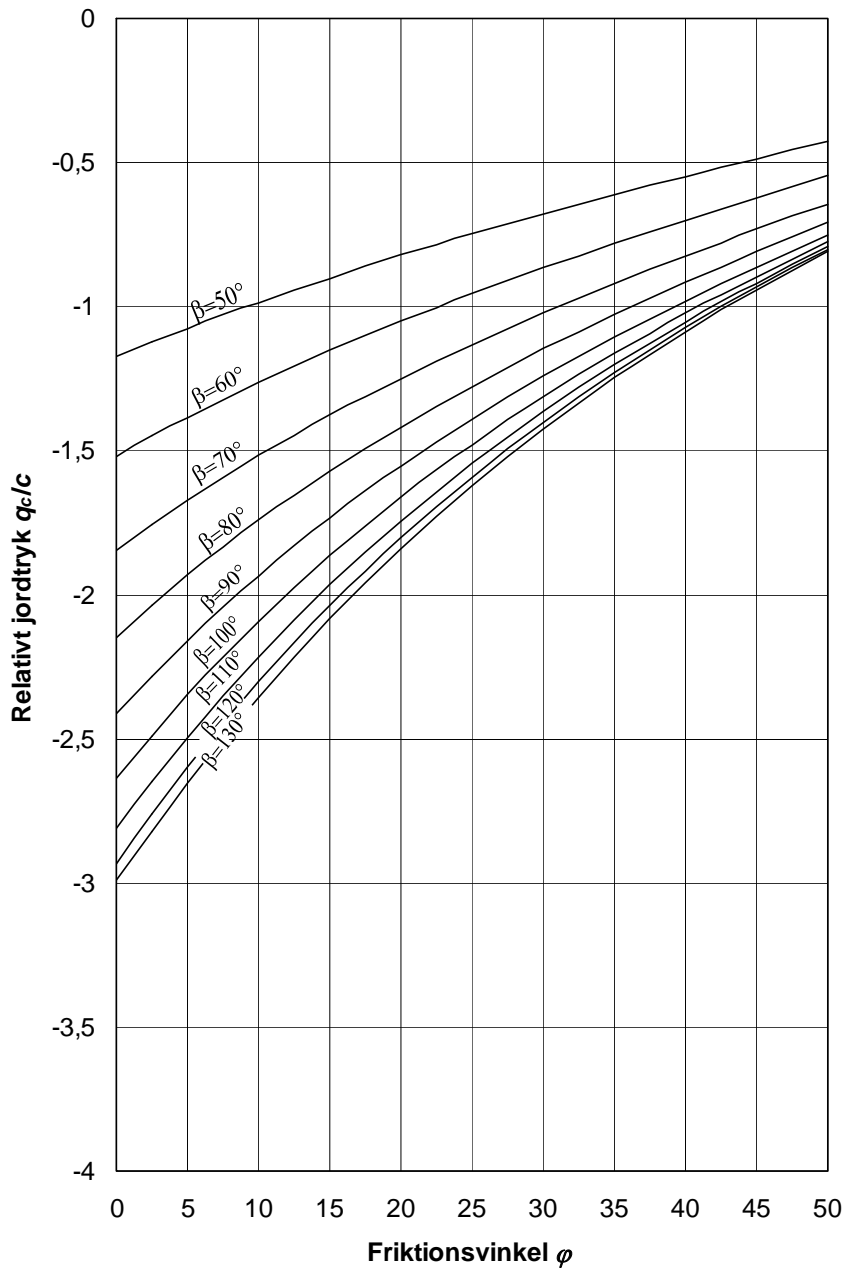
$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \sin \varphi \sin \left( \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right) + \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right] \quad (7.58)$$

Udtrykkene for jordtrykket på væggen kan reduceres til:

$$q_p = p \frac{1 - \sin^2 \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha + \varphi - 2\beta)} \quad (7.59)$$

$$q_c = c \cot \varphi \left( \frac{1 - \sin^2 \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha + \varphi - 2\beta)} - 1 \right) \quad (7.60)$$

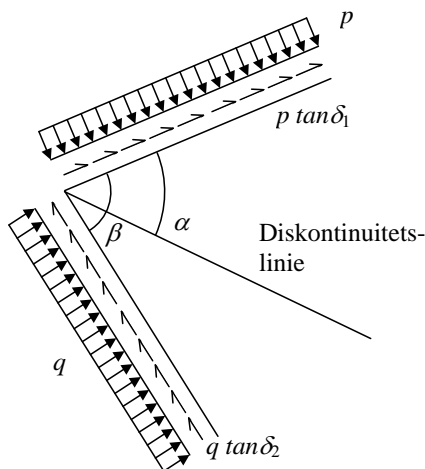
Formel (7.59) er identisk med ligning (7.22), som er løsningen for friktionsjord. Den relative værdi af  $q_p$  kan herved aflæses af figur 7.6. Den relative værdi af  $q_c$  kan aflæses af figur 7.15 som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$ . Kurverne er tegnet for forskellige værdier af vinklen  $\beta$ .



Figur 7.15: Det relative jordtryk  $q_c/c$  på ru støttemur for friktions- og kohæsionsjord som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$  ved anvendelse af én diskontinuitetslinje



## 8 Vilkårlig ru støttemur med hældende jordoverflade



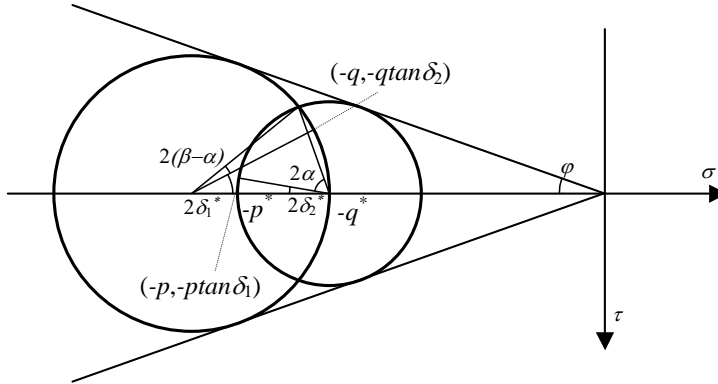
Figur 8.1: Ru støttemur med hældende jordoverflade

I dette afsnit behandles det generelle tilfælde, hvor både væggen og jordoverfladen kan have vilkårlig hældning. Væggen er ru og jordtrykket er som før betegnet med  $q$ . Belastningen på jordoverfladen er en trykspænding  $p$  og en forskydningsspænding givet ved en "friktionsvinkel"  $\delta_1$ . Skillefladen mellem væg og jord har friktionsvinklen  $\delta_2$ . Forholdene er illustreret i figur 8.1. Hældningen af overfladen har ingen restriktioner i dette tilfælde, hvor der ses bort fra egenvægten. I tilfældet med egenvægt vil der naturligvis være begrænsninger for, hvor stor en hældning, der er mulig.

De nye løsninger er sammenlignet med eksisterende teori i kapitel 17.

## 8.1 Friktionsjord

De Mohr'ske cirkler er vist i figur 8.2. Diskontinuitetslinien ligger under en vinkel  $\alpha$  regnet fra den frie jordoverflade. Fortegnsregning er som tidligere. Der indføres de i figuren viste spændinger  $q^*$  og  $p^*$  samt vinklerne  $\delta_2^*$  og  $\delta_1^*$ .

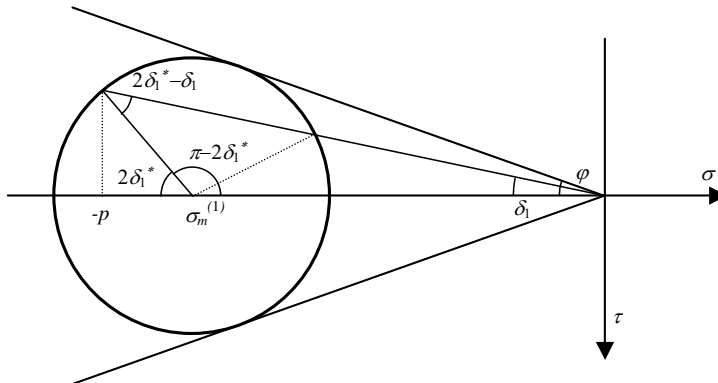


Figur 8.2: Mohr's cirkler. Ru væg. Vilkaarlig hældning af jordoverflade. Friktionsjord

Vinklerne  $\delta_1^*$  og  $\delta_2^*$  er funktioner af friktionsvinklen  $\delta_1$  for overfladelasten og vægfriktionsvinklen  $\delta_2$ . Vinklen mellem et snit med hovedspændingen  $q^*$  og diskontinuitetslinien ses af figur 8.2 at være  $\beta - \alpha + \delta_2^*$ . Vinklen mellem et snit med hovedspændingen  $p^*$  og diskontinuitetslinien ses at være være  $\alpha + \delta_1^*$ .

Vinklen  $\delta_2^*$  er defineret som  $\delta^*$  på figur 7.2. Det ses at:

$$\delta_2^* = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \frac{\sin \delta_2}{\sin \varphi} \right) - \delta_2 \right] \quad (8.1)$$



Figur 8.3: Sammenhæng imellem vinklerne  $2\delta_1^*$  og  $\delta_1$

I figur 8.3 er sammenhængen mellem vinklerne  $2\delta_1^*$  og  $\delta_1$  vist. Da  $\delta_1$  er kendt kan vinklen  $2\delta_1^*$  bestemmes som funktion af vinklen  $\delta_1$ . Opstilles sinusrelationen for trekanten, der har vinklerne  $\delta_1$ ,  $2\delta_1^* - \delta_1$  og  $\pi - 2\delta_1^*$ , fås:

$$\frac{\sigma_m^{(1)} \sin \varphi}{\sin \delta_1} = \frac{\sigma_m^{(1)}}{\sin(2\delta_1^* - \delta_1)} \quad (8.2)$$

Det ses, at middelspændingen  $\sigma_m^{(1)}$  kan bortforkortes. Herved fås:

$$\sin(2\delta_1^* - \delta_1) = \sin(\pi - 2\delta_1^* + \delta_1) = \frac{\sin \delta_1}{\sin \varphi} \quad (8.3)$$

Det ses på figur 8.3 at linien, som er bestemt af vægfriktionsvinklen  $\delta_1$ , skærer den Mohr'ske cirkel to steder. Dvs. at der findes to løsninger. Løsningen for den fuldt optrukne linie er vist i (8.2). Denne løsning svarer til første og tredje led i (8.3). Løsningen for den punkterede linie svarer til andet og tredje led i (8.3). Den brugbare løsning er den i figuren viste fuldt optrukne linie:

Som det ses kan højresiden skrives på to former. Løsning med hensyn til den første ligning i (8.3) giver den punkterede løsning i figur 8.3. Den brugbare løsning er den i figuren fuldt optegnede:

$$\delta_1^* = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \frac{\sin \delta_1}{\sin \varphi} \right) + \delta_1 \right] \quad (8.4)$$

Middelspændingerne svarende til de Mohr'ske cirkler i figur 8.2 kan udtrykkes ved:

$$\sigma_m^{(1)} = -\frac{p^*}{1 + \sin \varphi} \quad (8.5)$$

$$\sigma_m^{(2)} = -\frac{q^*}{1 - \sin \varphi} \quad (8.6)$$

Kontinuitetsbetingelsen for forskydningsspændingsspændingerne giver:

$$\begin{aligned} \sigma_m^{(1)} \sin \varphi \sin(2\delta_1^* + 2\alpha) &= \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*) \\ \Updownarrow \\ \sigma_m^{(1)} &= \sigma_m^{(2)} \frac{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*)}{\sin(2\delta_1^* + 2\alpha)} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Ud fra kontinuitetsbetingelsen for normalspændingerne fås:

$$\sigma_m^{(1)} + \sigma_m^{(1)} \sin \varphi \cos(2\delta_1^* + 2\alpha) = \sigma_m^{(2)} - \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \cos(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*) \quad (8.8)$$

Indsættes (8.7) i (8.8) fås en ligning til bestemmelse af  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \sigma_m^{(2)} \frac{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*)}{\sin(2\delta_1^* + 2\alpha)} (1 + \sin \varphi \cos(2\delta_1^* + 2\alpha)) \\ = \sigma_m^{(2)} - \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \cos(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Det ses at ligningerne (8.7) og (8.9) er identiske med ligningerne (7.9) og (7.10), bortset fra at vinklerne er ændret. Ved at tage højde for de ændrede vinkler kommer løsningen til se ud som følger:

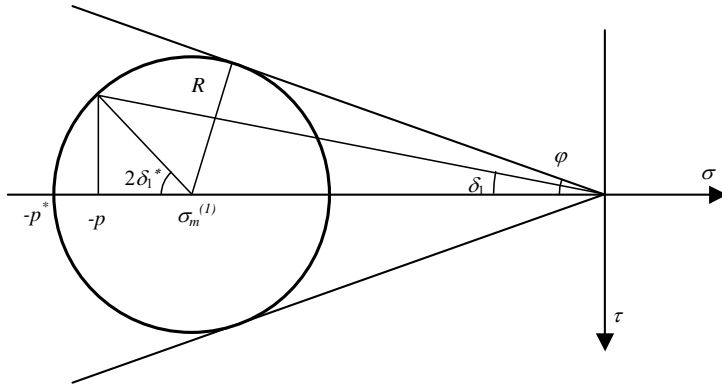
$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \sin \varphi \sin(\beta + \delta_2^* + \delta_1^*) \right) + \beta + \delta_2^* - \delta_1^* \right] \quad (8.10)$$

Når vinklen  $\alpha$  er bestemt ud fra (8.10) kan tryknormalspændingen  $q^*$  findes ved indsætte (8.5) og (8.6) i (8.7). Herved fås:

$$q^* = p^* \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin(2\alpha + 2\delta_1^*)}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*)} \quad (8.11)$$

Omregningen fra  $q^*$  til  $q$  er identisk med (7.15), idet definitionen af  $\delta^*$  og  $\delta_2^*$  er den samme:

$$q^* = q \frac{1 - \sin \varphi}{1 - \cos(2\delta_2^*) \sin \varphi} \quad (8.12)$$



Figur 8.4: Omregning fra  $p^*$  til  $p$

Den Mohr'ske cirkel i figur 8.4 er bestemt ved middelspændingen  $\sigma_m^{(1)}$  og Radius  $R$ . Ved flydning kan radius  $R$  udtrykkes ved middelspændingen  $\sigma_m^{(1)}$  og friktionsvinklen  $\varphi$ . Vi får:

$$R = -\sigma_m^{(1)} \sin \varphi \quad (8.13)$$

Ud fra figur 8.4 fås følgende formel for  $p$ :

$$p = -\sigma_m^{(1)} + R \cos 2\delta_1^* \quad (8.14)$$

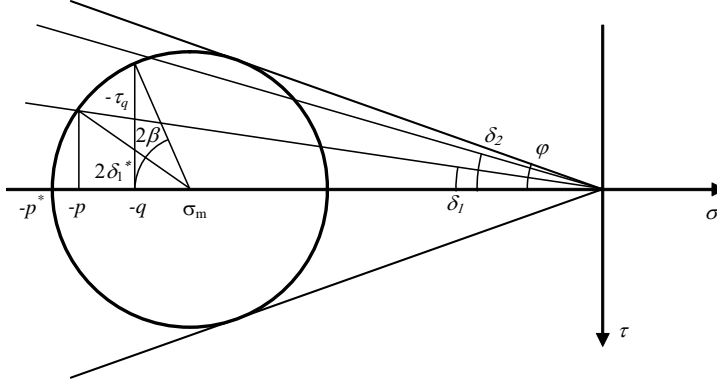
Idet middelspændingen  $\sigma_m^{(1)}$  er givet ved (8.5) og  $R$  er givet ved (8.13) kan normalspændingen  $p^*$  på overfladen bestemmes:

$$p^* = p \frac{1 + \sin \varphi}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} \quad (8.15)$$

Indsættes udtrykkene for  $p^*$  og  $q^*$ , (8.15) og (8.12), i (8.11), fås den endelige formel for jordtrykket på væggen:

$$q = p \frac{1 - \cos(2\delta_2^*) \sin \varphi}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} \frac{\sin(2\alpha + 2\delta_1^*)}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*)} \quad (8.16)$$

Løsningen forudsætter selvfølgelig at  $\alpha < \beta$ , da diskontinuitetslinien i modsat fald ligger udenfor jorden, hvilket ikke kan lade sig gøre. Hvis  $\alpha \geq \beta$  kan jordtrykket bestemmes ud fra den homogene spændingstilstand i vinklen  $\beta$ .



Figur 8.5: Beregning af  $q$  i tilfældet  $\alpha \geq \beta$ .

Som det ses af figur 8.5, vil ruheden ved væggen ikke være udnyttet i dette tilfælde. Hovedspændingerne kan bestemmes ud fra spændingen  $p^*$  på overfladen:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -p^* \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \\ \sigma_2 &= -p^* \end{aligned} \quad (8.17)$$

Vha. af transformationsformlerne for plane spændingstilstande fås jordtrykket til:

$$\begin{aligned} q &= -\sigma_1 \sin^2 \beta - \sigma_2 \cos^2 \beta = p^* \left( \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right) \\ &= p \frac{1 + \sin \varphi \cos \beta}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} \end{aligned} \quad (8.18)$$

og forskydningsspændingen er givet ved:

$$\tau_q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\beta = -p^* \sin 2\beta \left( \frac{\sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right) = -p \frac{\sin \varphi \sin \beta}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} \quad (8.19)$$

### 8.1.1 Jordtryk for ru væg, $\delta_2 = \varphi$

I tilfælde af maksimal ruhed  $\delta_2 = \varphi$  fås følgende udtryk til bestemmelse af  $\delta_2^*$ :

$$\delta_2^* = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (8.20)$$

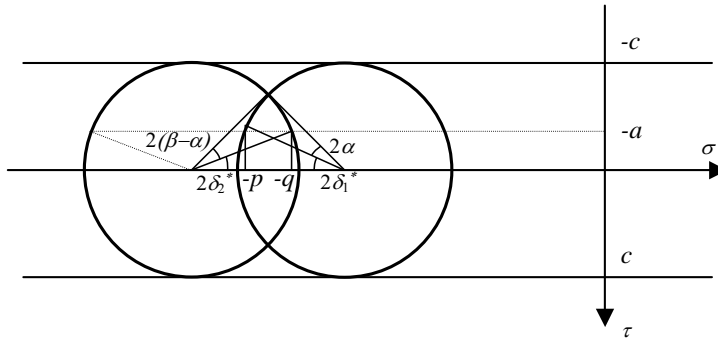
Vinklen  $\alpha$  til diskontinuitetslinien kan bestemmes ved:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \sin \varphi \sin \left( \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + 2\delta_1^* \right) \right) \right] + \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \delta_1^* \quad (8.21)$$

Jordtrykket på væggen kan reduceres til:

$$q = p \frac{1 - \sin^2 \varphi}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} \frac{\sin(2\alpha + 2\delta_1^*)}{\cos(2\alpha + \varphi - 2\beta)} \quad (8.22)$$

## 8.2 Kohæsionsjord



Figur 8.6: Mohr's cirkler. Ru væg. Vilkårlig hældning af jordoverflade. Kohæsionsjord

For kohæsionsjord forløber beregningerne som følger. Vinklen  $\delta_2^*$  er defineret som  $\delta^*$  i figur 7.7, og er derfor bestemt ved (7.24):

$$\delta_2^* = \frac{1}{2} \text{Arc sin} \left( \frac{a}{c} \right) \quad (8.23)$$

Middelspændingerne bliver:

$$\sigma_m^{(1)} = -p^* + c \quad (8.24)$$

$$\sigma_m^{(2)} = -q^* - c \quad (8.25)$$

Kontinuitetsbetingelsen for forskydningsspændingerne lyder:

$$-c \sin(2\beta + 2\delta_2^* - 2\alpha) = -c \sin(2\delta_1^* + 2\alpha) \quad (8.26)$$

Idet vinklerne indenfor sinusfunktionerne må være ens fås  $\alpha$  til:

$$\alpha = \frac{1}{2} (\beta + \delta_2^* - \delta_1^*) \quad (8.27)$$

Løsningen for  $\alpha$  er kun gyldig såfremt  $\alpha$  er mindre end  $\beta$ , da diskontinuitetslinien ellers vil ligge udenfor jorden. Benyttes  $\alpha$  fra (8.27) fås følgende krav:

$$\beta > \delta_2^* - \delta_1^* \quad (8.28)$$

Kontinuitetsbetingelsen for normalspændingerne giver:

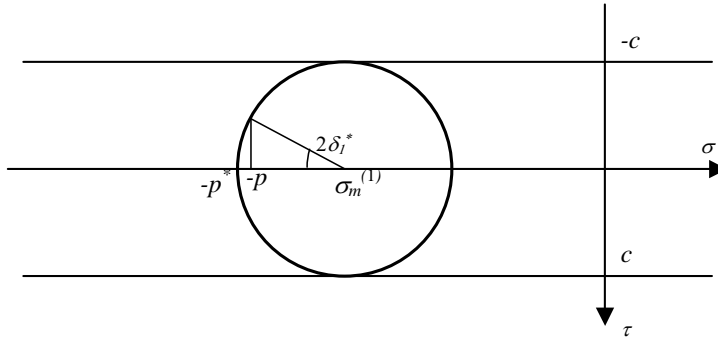
$$\sigma_m^{(1)} - c \cos(2\alpha + 2\delta_1^*) = \sigma_m^{(2)} + c \cos(2\beta + 2\delta_2^* - 2\alpha)$$

Idet det benyttes, at  $\alpha$  er kendt fra (8.27) fås:

$$\begin{aligned} \sigma_m^{(1)} - c \cos(\beta + \delta_2^* + \delta_1^*) &= \sigma_m^{(2)} + c \cos(\beta + \delta_2^* + \delta_1^*) \\ \Downarrow \\ -p^* + c - c \cos(\beta + \delta_2^* + \delta_1^*) &= -q^* - c + c \cos(\beta + \delta_2^* + \delta_1^*) \\ \Downarrow \\ q^* &= p^* - 2c(1 - \cos(\beta + \delta_2^* + \delta_1^*)) \end{aligned} \quad (8.29)$$

Omregningen fra  $q^*$  til  $q$  er identisk med (7.31), idet  $\delta_2^*$  og  $\delta^*$  er defineret ens:

$$q^* = q - c + c \cos(2\delta_2^*) \quad (8.30)$$



Figur 8.7: Omregning fra  $p^*$  til  $p$

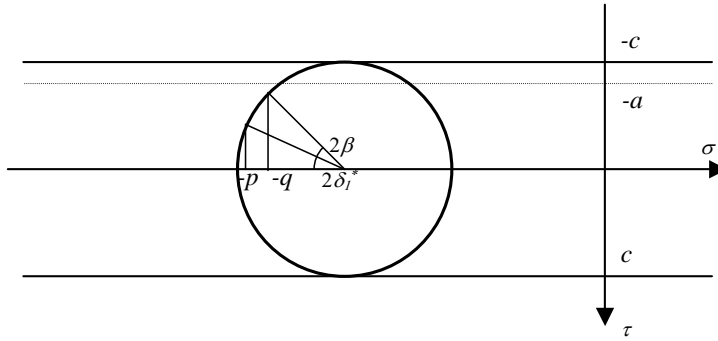
Omregningen fra  $p^*$  til  $p$  kan ifølge figur 8.7 skrives:

$$p^* = p + c - c \cos(2\delta_1^*) \quad (8.31)$$

Indsættes de kendte størrelser,  $p^*$  fra (8.31) og  $q^*$  fra (8.30), i (8.29) fås:

$$q = p - c(\cos(2\delta_1^*) + \cos(2\delta_2^*) - 2\cos(\beta + \delta_1^* + \delta_2^*)) \quad (8.32)$$

Såfremt (8.28) ikke er opfyldt vil ruheden ikke blive fuldt udnyttet. Spændingsfeltet er homogent.



Figur 8.8: Beregning af  $q$  i tilfælde  $\alpha \geq \beta$

I figur 8.8 er spændingstilstanden optegnet. Vi finder:

$$q = p - c \left( \cos(2\delta_1^*) - \cos(2\beta + 2\delta_1^*) \right) \quad (8.33)$$

### 8.2.1 Jordtryk for ru væg, $a=c$

I tilfælde af maksimal ruhed, dvs.  $a=c$ , fås at vinklen  $\delta_2^*$  er bestemt ved:

$$\delta_2^* = \frac{\pi}{4} \quad (8.34)$$

Derved kan vinklen  $\alpha$  bestemmes ved:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} - \frac{\delta_1^*}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (8.35)$$

Kravet for en tilladelige løsning, dvs. at (8.28) er opfyldt, kommer til at lyde:

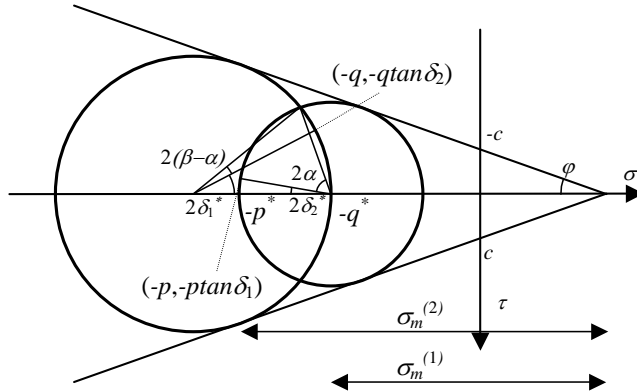
$$\beta > \frac{\pi}{4} - \delta_1^* \quad (8.36)$$

Endelig fås jordtrykket til:

$$q = p - c \left( \cos(2\delta_1^*) - 2 \cos \left( \beta + \delta_1^* + \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (8.37)$$



### 8.3 Friktions- og kohæsionsjord



Figur 8.9: Mohr's cirkler. Ru væg. Jordoverflade med vilkårlig hældning. Friktions- og kohæsionsjord

I dette afsnit behandles det tilfælde, hvor jorden har både friktion og kohæsion. De Mohr'ske cirkler er vist i figur 8.9.

Vinklerne  $\delta_1^*$  og  $\delta_2^*$  er som ovenfor funktioner af friktionskoefficienten  $\delta_1$  for overfladelasten og vægfriktionsvinklen  $\delta_2$ . Vinklen mellem et snit med hovedspændingen  $q^*$  og diskontinuitetslinien ses af figur 8.2 at være  $\beta - \alpha + \delta_2^*$ . Vinklen mellem et snit med hovedspændingen  $p^*$  og diskontinuitetslinien ses at være  $\alpha + \delta_1^*$ .

Vinklen  $\delta_2^*$  er defineret som på figur 8.2 og kan bestemmes ved (8.1), dvs.:

$$\delta_2^* = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \frac{\sin \delta_2}{\sin \varphi} \right) - \delta_2 \right] \quad (8.38)$$

Vinklerne  $2\delta_1^*$  og  $\delta_1$  er defineret som vist på figur 8.2. Dette betyder, at vinklen  $\delta_1^*$  er bestemt ved (8.4), dvs.:

$$\delta_1^* = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \frac{\sin \delta_1}{\sin \varphi} \right) + \delta_1 \right] \quad (8.39)$$

Middelspændingerne  $\sigma_m^{(1)}$  og  $\sigma_m^{(2)}$  i figur 8.9 kan udtrykkes ved:

$$\sigma_m^{(1)} = \frac{p^* + c \cot \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (8.40)$$

$$\sigma_m^{(2)} = \frac{q^* + c \cot \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (8.41)$$

Kontinuitetsbetingelsen for forskydningsspændingerne giver:

$$-\sigma_m^{(1)} \sin \varphi \sin(2\delta_1^* + 2\alpha) = -\sigma_m^{(2)} \sin \varphi \sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*)$$

⇕

$$\sigma_m^{(1)} = \sigma_m^{(2)} \frac{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*)}{\sin(2\delta_1^* + 2\alpha)} \quad (8.42)$$

Kontinuitetsbetingelserne for normalspændingerne fører til:

$$-\sigma_m^{(1)} - \sigma_m^{(1)} \sin \varphi \cos(2\delta_1^* + 2\alpha) = -\sigma_m^{(2)} + \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \cos(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*) \quad (8.43)$$

Indsættes (8.42) i (8.43) fås en ligning til bestemmelse af  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \sigma_m^{(2)} \frac{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*)}{\sin(2\delta_1^* + 2\alpha)} (1 + \sin \varphi \cos(2\delta_1^* + 2\alpha)) \\ = \sigma_m^{(2)} - \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \cos(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*) \end{aligned} \quad (8.44)$$

Det ses at ligningen er identisk med (8.9), hvorved løsningen kommer til se ud som følger:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin}(\sin \varphi \sin(2\beta + 2\delta_2^* + 2\delta_1^*)) + \beta + \delta_2^* - \delta_1^* \right] \quad (8.45)$$

Når vinklen  $\alpha$  er bestemt af (8.45) kan tryknormalspændingen  $q^*$  findes ved indsætte (8.40) og (8.41) i (8.42). Herved fås:

$$q^* = (p^* + c \cot \varphi) \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin(2\alpha + 2\delta_1^*)}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*)} - c \cot \varphi \quad (8.46)$$

Omregningen fra  $q$  til  $q^*$  er identisk med (8.12):

$$q^* = (q + c \cot \varphi) \frac{1 - \sin \varphi}{1 - \cos(2\delta_2^*) \sin \varphi} - c \cot \varphi \quad (8.47)$$

Omregningen fra  $p$  til  $p^*$  er identisk med (8.15):

$$p^* = (p + c \cot \varphi) \frac{1 + \sin \varphi}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} - c \cot \varphi \quad (8.48)$$

Indsættes udtrykkene for  $p^*$  og  $q^*$ , (8.47) og (8.48) i (8.46), fås den endelige formel for jordtrykket på væggen:

$$q = (p + c \cot \varphi) \frac{1 - \cos(2\delta_2^*) \sin \varphi}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} \frac{\sin(2\alpha + 2\delta_1^*)}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*)} - c \cot \varphi \quad (8.49)$$

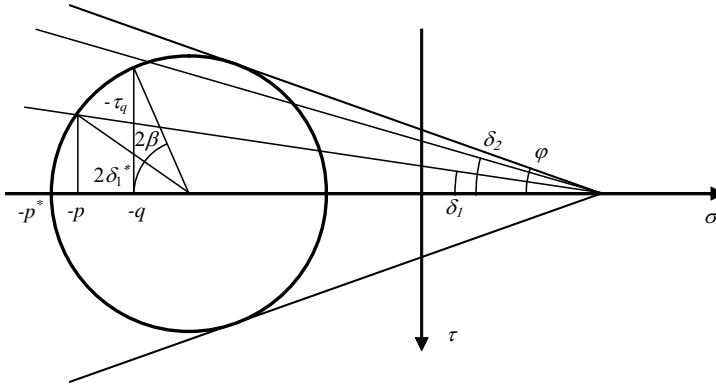
Jordtrykket  $q$  kan deles op i to dele fra henholdsvis overfladelasten  $p$  og kohæsionen  $c$ :

$$q_p = p \frac{1 - \cos(2\delta_2^*) \sin \varphi}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} \frac{\sin(2\alpha + 2\delta_1^*)}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*)} \quad (8.50)$$

$$q_c = c \cot \varphi \left( \frac{1 - \cos(2\delta_2^*) \sin \varphi}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} \frac{\sin(2\alpha + 2\delta_1^*)}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta_2^*)} - 1 \right) \quad (8.51)$$

Jordtrykket fra overfladelasten (8.50) er identisk med (8.16), som er løsningen for friktionsjord.

Løsningen forudsætter selvfølgelig at  $\alpha < \beta$ , da diskontinuitetslinien ellers ligger udenfor jorden, hvilket ikke kan lade sig gøre. I dette tilfælde kan jordtrykket, som tidligere, bestemmes vha. den homogene spændingstilstand i området svarende til vinklen  $\beta$ .



Figur 8.10: Beregning af  $q$  i tilfældet  $\alpha \geq \beta$ .

Som det ses af figur 8.10, vil ruheden af væggen ikke være fuldt udnyttet. Hovedspændingerne kan bestemmes ud fra  $p$  :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -(p^* + \cot \varphi) \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - c \cot \varphi \\ \sigma_2 &= -p^*\end{aligned}\quad (8.52)$$

Vha. transformationsformlerne for plane spændingstilstande findes:

$$q = -\sigma_1 \sin^2 \beta - \sigma_2 \cos^2 \beta = p^* \frac{1 + \sin \varphi \cos 2\beta}{1 + \sin \varphi} - c \frac{2 \cos \varphi \sin^2 \beta}{1 + \sin \varphi} \quad (8.53)$$

Forskydningsspændingen er givet ved:

$$\tau_q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\beta = -p^* \frac{\sin \varphi \sin 2\beta}{1 + \sin \varphi} - c \frac{\cos \varphi \sin 2\beta}{1 + \sin \varphi} \quad (8.54)$$

Anvendes omregningen fra  $p^*$  til  $p$  fås:

$$q = p \frac{1 + \sin \varphi \cos 2\beta}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} - c \frac{2 \cos \varphi \sin^2 \beta}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} \quad (8.55)$$

$$\tau_q = -p \frac{\sin \varphi \sin 2\beta}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} - c \frac{\cos \varphi \sin 2\beta}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} \quad (8.56)$$

### 8.3.1 Jordtryk for ru væg, $\delta_2 = \varphi$ og $a = c$

I tilfælde af maksimal ruhed  $\delta_2 = \varphi$  fås følgende udtryk for  $\delta_2^*$ :

$$\delta_2^* = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (8.57)$$

Vinklen  $\alpha$  fra jordoverfladen til diskontinuitetslinien kan bestemmes ved:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \sin \varphi \sin \left( \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + 2\delta_1^* \right) \right) + \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \delta_1^* \right] \quad (8.58)$$

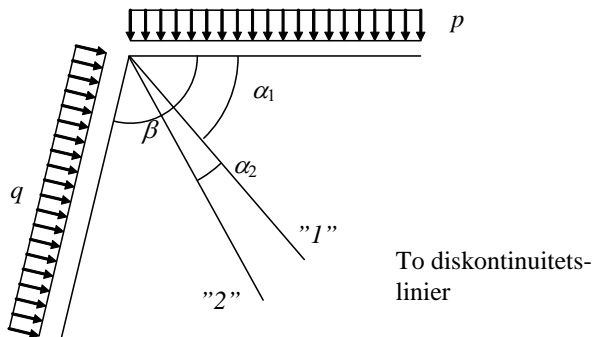
Jordtrykket kan reduceres til:

$$q = p \frac{1 - \sin^2 \varphi}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} \frac{\sin(2\alpha + 2\delta_1^*)}{\cos(2\alpha + \varphi - 2\beta)} \quad (8.59)$$

## 9 Anvendelse af flere diskontinuitetslinier

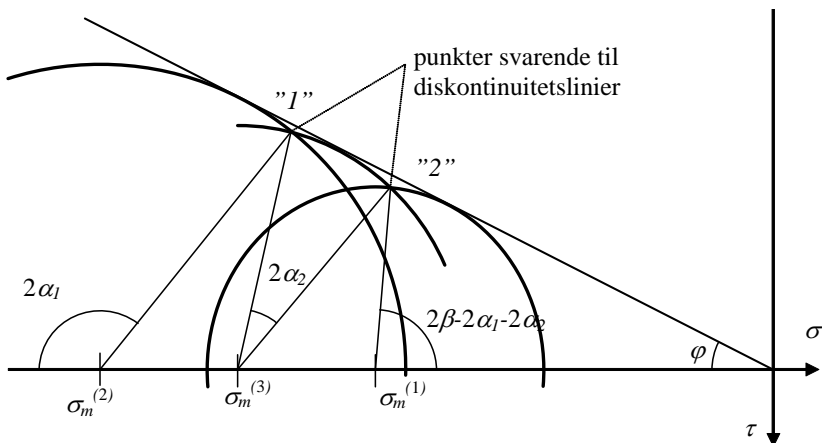
I det følgende udvikles løsninger med flere diskontinuitetslinier. Så vidt vides er disse løsninger nye.

Når vinklen  $\beta$  er tilstrækkelig stor er der mulighed for at anvende flere end én diskontinuitetslinie. Ved at anvende flere diskontinuitetslinier får man en bedre nedreværdiløsning. Ved en bedre nedreværdi forstås, som tidligere nævnt, at jordtrykket  $q$  reduceres i det aktive tilfælde.



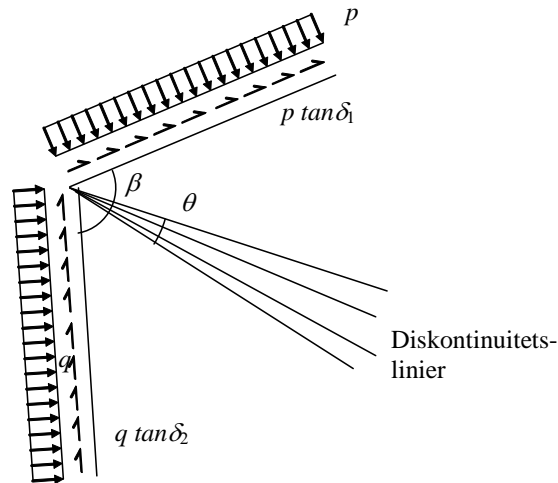
Figur 9.1: Jordproblem med to diskontinuitetslinier

I figur 9.1 er vist et tilfælde hvor der er benyttet to diskontinuitetslinier. Vinklen fra overfladen til den første diskontinuitetslinie er  $\alpha_1$ , vinklen mellem de to diskontinuitetslinier er  $\alpha_2$ .



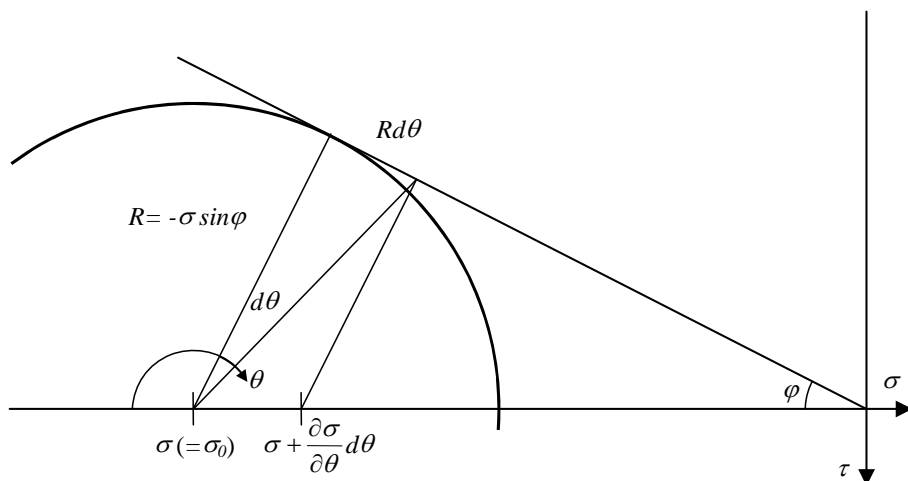
Figur 9.2: Mohr's cirkler tegnet for tilfældet med to diskontinuitetslinier i friktionsjord

På figur 9.2 er Mohr's cirkel tegnet for de tre spændingsfelter i friktionsjord. Det ses at vinklen  $\beta$  mindst skal være  $\pi/2$  før det er muligt at indføre en ny diskontinuitetslinie. Er vinklen  $\beta$  stor nok til at én ny diskontinuitetslinie kan indføres, kan man i princippet indføre uendelig mange diskontinuitetslinier. For hver ekstra diskontinuitetslinie der indføres, bliver nedreværdiløsningen forbedret. I det følgende gennemgås grænsetilfældet, hvor der er indført uendelig mange diskontinuitetslinier.



Figur 9.3: Jordproblem med uendelig mange diskontinuitetslinier

## 9.1 Friktionsjord



Figur 9.4: Infinitesimal ændring af vinklen  $\theta$  for friktionsjord

Grænsetilfældet uendelig mange diskontinuitetslinier er vist i figur 9.4. Vinklen  $\theta$  er vinklen mellem første diskontinuitetslinie og en vilkårlig diskontinuitetslinie. Den infinitesimale ændring af vinklen  $d\theta$  er vist i figuren. Udfra denne fås at ændringen af middelspændingen  $\sigma$  er givet ved:

$$d\sigma = \frac{R}{\cos \varphi} d\theta$$

Ligningen kan skrives

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} d\theta = \frac{R}{\cos \varphi} d\theta \quad (9.1)$$

Indsættes  $R$  som funktion af  $\sigma$  som angivet i figur 9.4 fås:

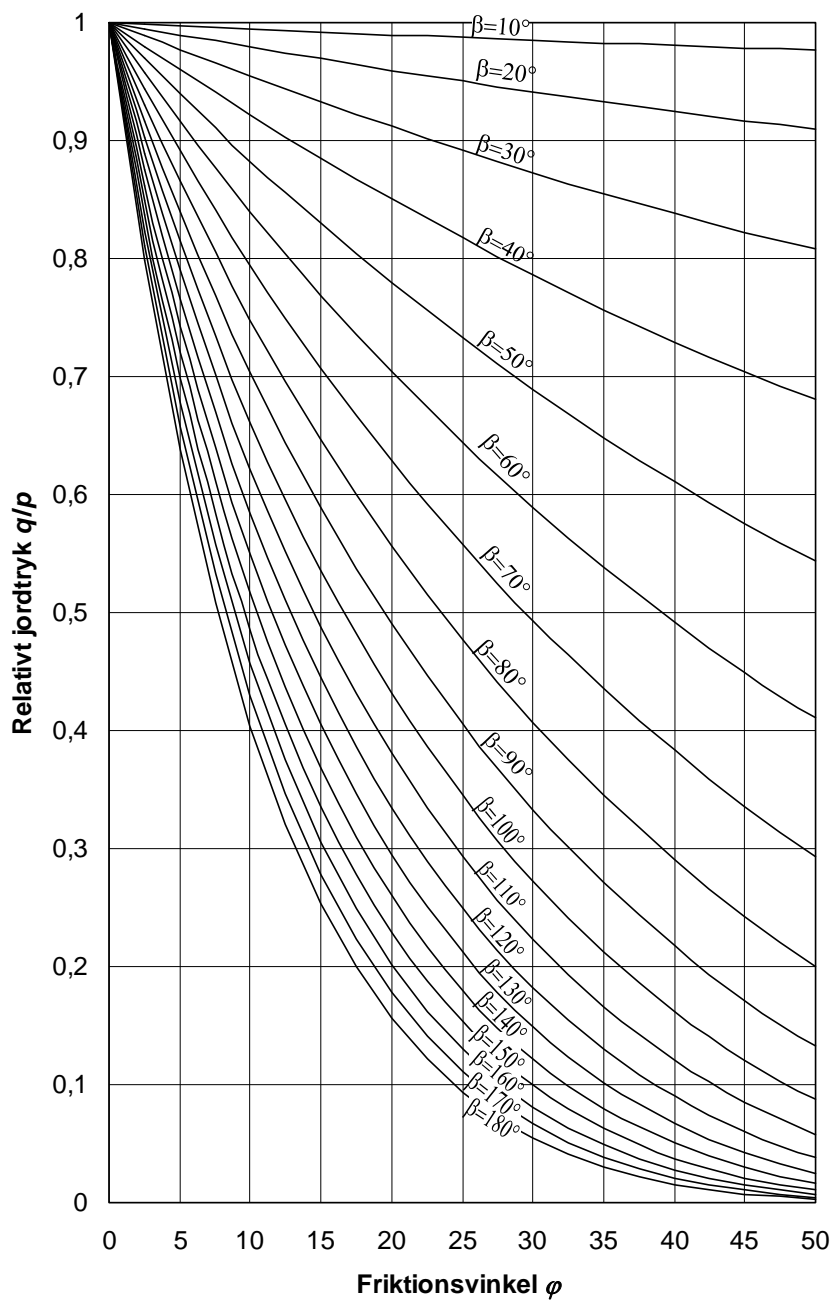
$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \sigma \tan \varphi = 0 \quad (9.2)$$

Den spændingstilstand, der svarer til uendelig mange diskontinuitetslinier, findes ved løsning af denne ligning til:

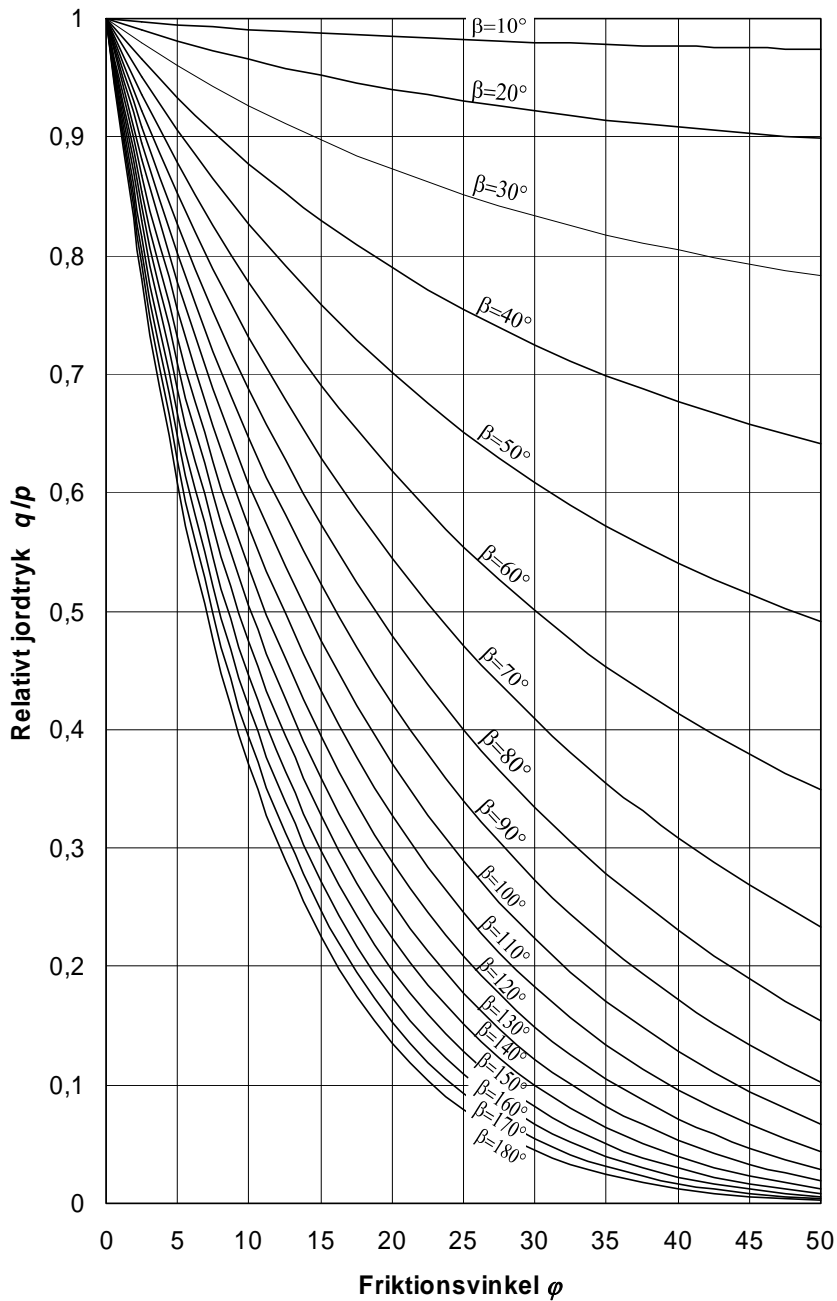
$$\sigma = \sigma_0 e^{-\theta \tan \varphi} \quad (9.3)$$





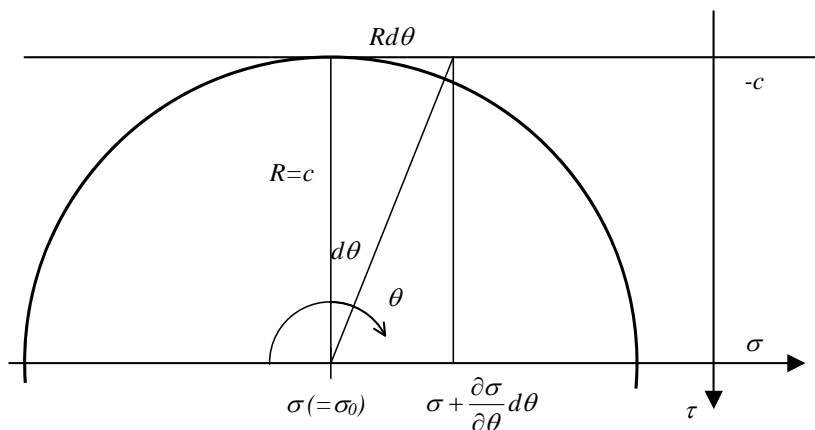


Figur 9.6: Det relative jordtryk  $q/p$  på glat støttemur for friktionsjord som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$  ved anvendelse af én eller flere diskontinuitetslinier



Figur 9.7: Det relative jordtryk  $q/p$  på ru støttemur for friktionsjord som funktion af friktionsvinklen  $\phi$  ved anvendelse af én eller flere diskontinuitetslinier

## 9.2 Kohæsionsjord



Figur 9.8: Infinitesimal ændring af vinklen  $\theta$  for kohæsionsjord

For kohæsionsjord er forholdene illustreret i figur 9.8. Udfra figuren fås, at ændringen af middelspændingen  $\sigma$  er givet ved:

$$d\sigma = R d\theta \quad (9.9)$$

der kan skrives:

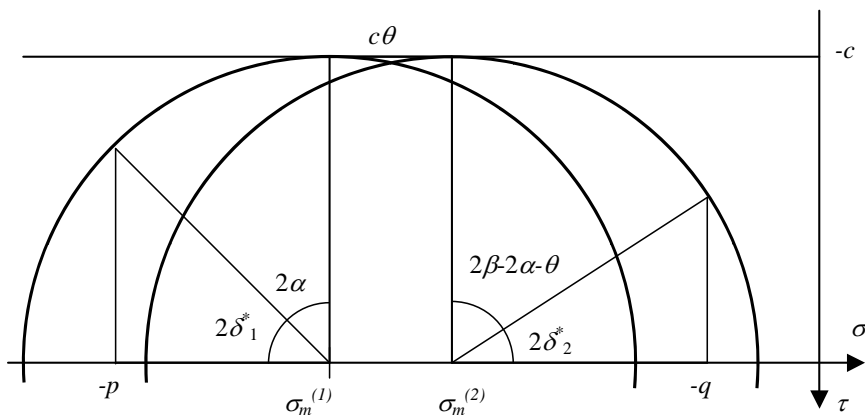
$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} d\theta = R d\theta \quad (9.10)$$

Som vist i figur 9.8 har vi  $R=c$ , dvs.:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} - c = 0 \quad (9.11)$$

der giver:

$$\sigma = \sigma_0 + c\theta \quad (9.12)$$



Figur 9.9 Kohæsionsjord, uendelig mange diskontinuitetslinier

Som før gælder løsningen selvfølgelig kun såfremt  $\theta$  er positiv. Middelspændingen for den første Mohr's cirkel,  $\sigma_m^{(1)}$ , kan udtrykkes ved overfladelasten  $p$  ved:

$$\sigma_m^{(1)} = -p + c \cos(2\delta_1^*) \quad (9.13)$$

Sættes  $\sigma_m^{(1)}$  lig med  $\sigma_0$  i formel (9.12) kan middelspændingen for en vilkårlig Mohr's cirkel,  $\sigma_m^{(2)}$ , svarende til en drejning  $\theta$  bestemmes som vist i figur 9.9. Derved bliver:

$$\sigma_m^{(2)} = -p + c \cos(2\delta_1^*) + c\theta \quad (9.14)$$

Omregning fra middelspændingen  $\sigma_m^{(2)}$  til  $q$  er givet ved:

$$\sigma_m^{(2)} = -q - c \cos(2\delta_2^*) \quad (9.15)$$

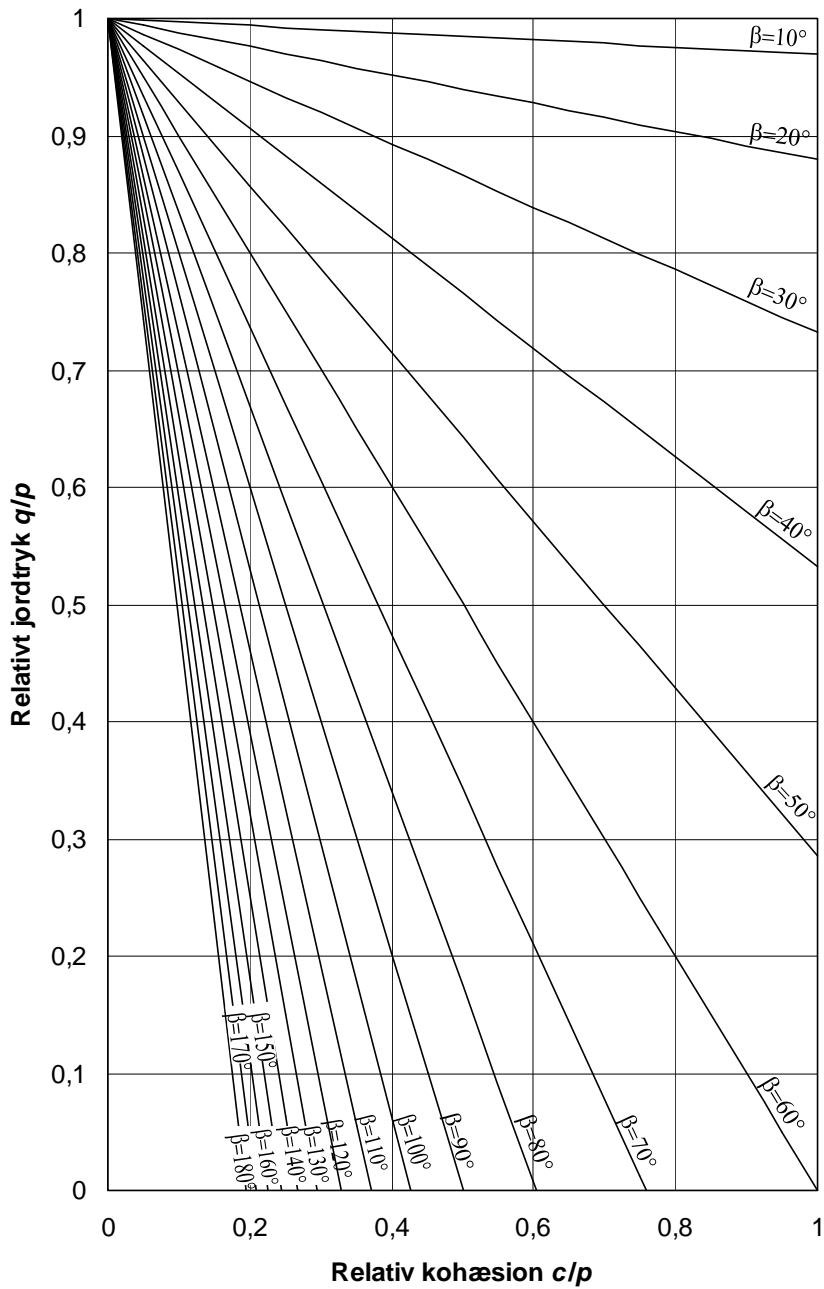
Indsættes (9.15) i (9.14) fås den endelige formel for beregning af jordtrykket  $q$  på væggen:

$$q = p - c(\cos(2\delta_1^*) + \theta + \cos(2\delta_2^*)) \quad (9.16)$$

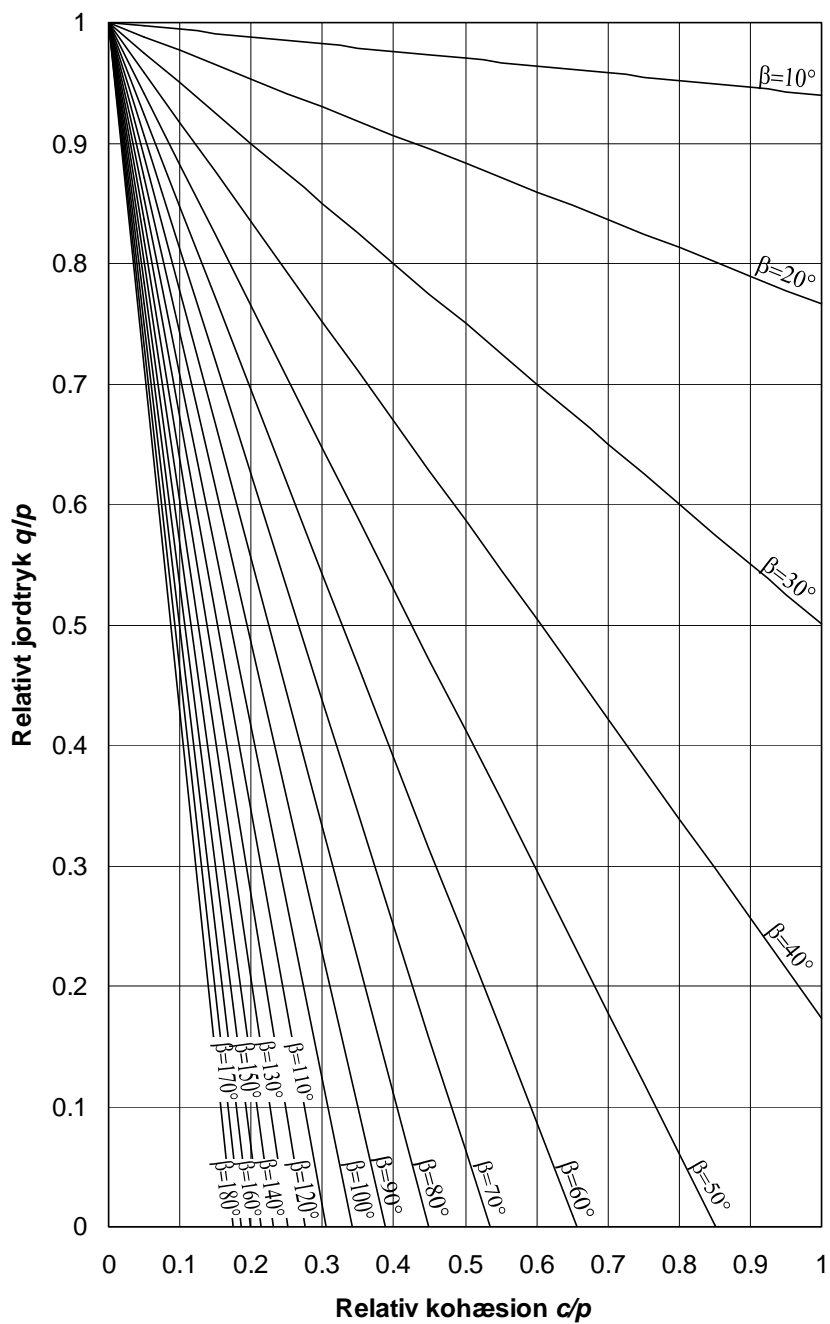
Vinklen  $\theta$  er givet ved:

$$\theta = 2\beta + 2\delta_2 + 2\delta_1 - \pi \quad (9.17)$$

Benyttes denne løsning så længe  $\theta$  er positiv og løsningerne for én diskontinuitetslinie såfremt dette ikke er tilfældet, bliver figur 6.5 og figur 7.10 modificeret som vist i henholdsvis figur 9.10 og figur 9.11.

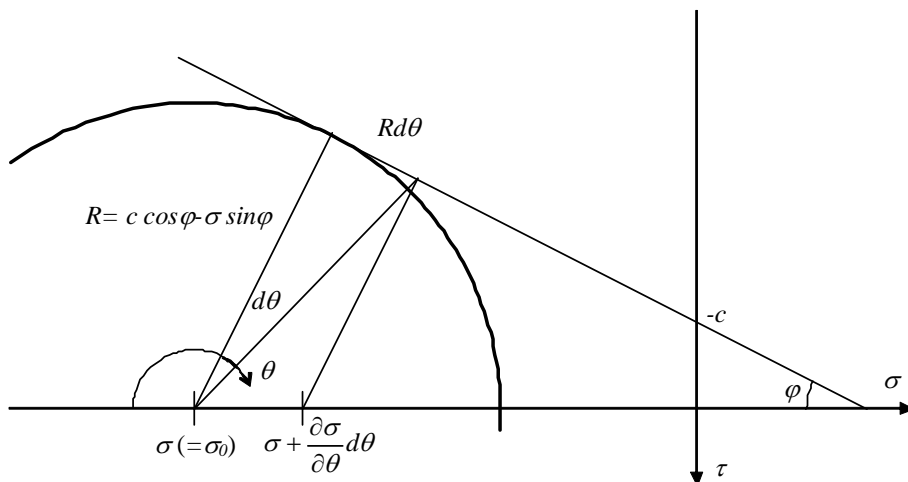


Figur 9.10: Det relative jordtryk  $q/p$  på glat støttemur for kohæsionsjord som funktion af den relative kohæsion  $c/p$  ved anvendelse af én eller flere diskontinuitetslinier



Figur 9.11: Det relative jordtryk  $q/p$  på ru støttemur for kohæsionsjord som funktion af den relative kohæsion  $c/p$  ved anvendelse af én eller flere diskontinuitetslinier

### 9.3 Friktions- og kohæsionsjord



Figur 9.12: Infinitesimal ændring af vinklen  $\theta$  for friktions- og kohæsionsjord

Den infinitesimale ændring  $d\theta$  af vinklen  $\theta$ , når det drejer sig om friktions- og kohæsionsjord, er vist på figur 9.12. Udfra figuren ses, at ændringen af middelspændingen er givet ved:

$$d\sigma = \frac{R}{\cos \varphi} d\theta \quad (9.18)$$

der kan skrives:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} d\theta = \frac{R}{\cos \varphi} d\theta \quad (9.19)$$

Indsættes  $R$  som funktion af  $\sigma$  som vist i figur 9.12 fås:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \sigma \tan \varphi - c = 0 \quad (9.20)$$

Løsning af denne ligning giver

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\theta \tan \varphi} + c \cot \varphi \quad (9.21)$$



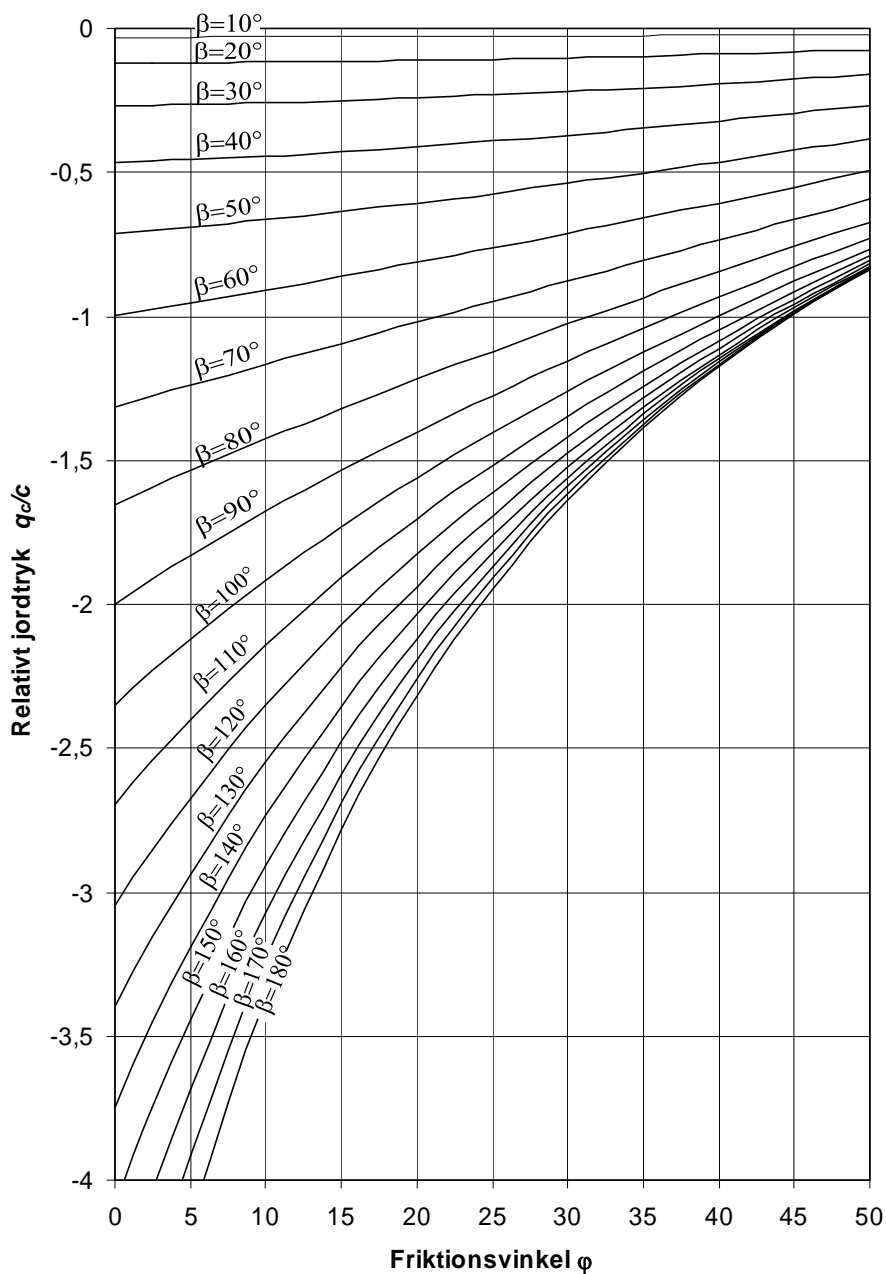


hvor

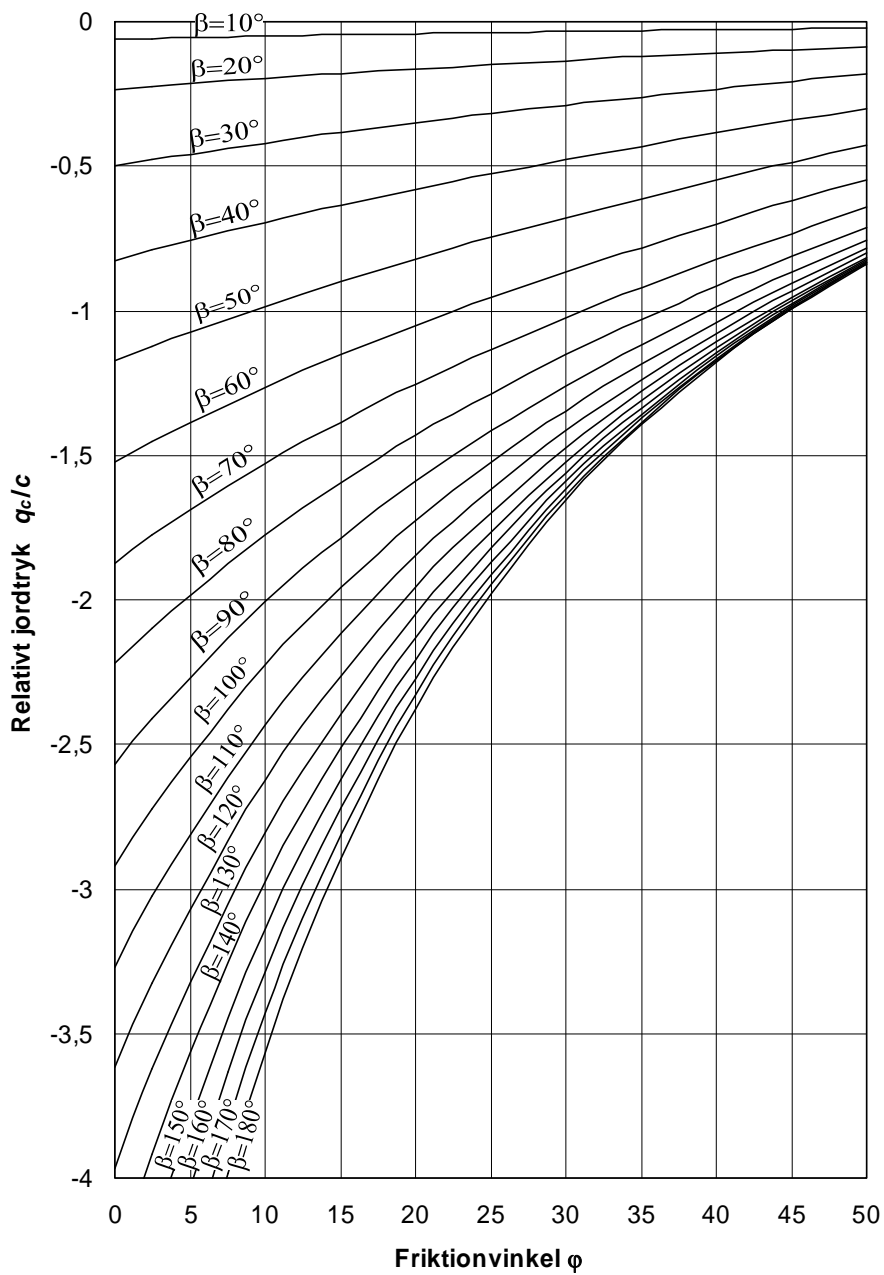
$$\theta = 2\beta + 2\delta_2 + 2\delta_1 - \pi \quad (9.28)$$

Som før gælder løsningen selvfølgelig kun såfremt  $\theta$  er positiv.

Benyttes denne løsning så længe  $\theta$  er positiv og løsningerne for én diskontinuitetslinie såfremt dette ikke er tilfældet, bliver figur 6.7 og figur 7.15 modificeret som vist i henholdsvis figur 9.14 og figur 9.15. Figurerne viser det relative jordtryk  $q/c$  på væggen som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$ . Kurverne er tegnet for forskellige værdier af  $\beta$ .



Figur 9.14: Det relative jordtryk  $q/c$  på glat støttemur for friktions- og kohæsionsjord som funktion af friktionsvinklen  $\phi$  ved anvendelse af én eller flere diskontinuitetslinier



Figur 9.15: Det relative jordtryk  $q_c/c$  på ru støttemur for friktions- og kohæsionsjord som funktion af friktionsvinklen  $\phi$  ved anvendelse af én eller flere diskontinuitetslinier

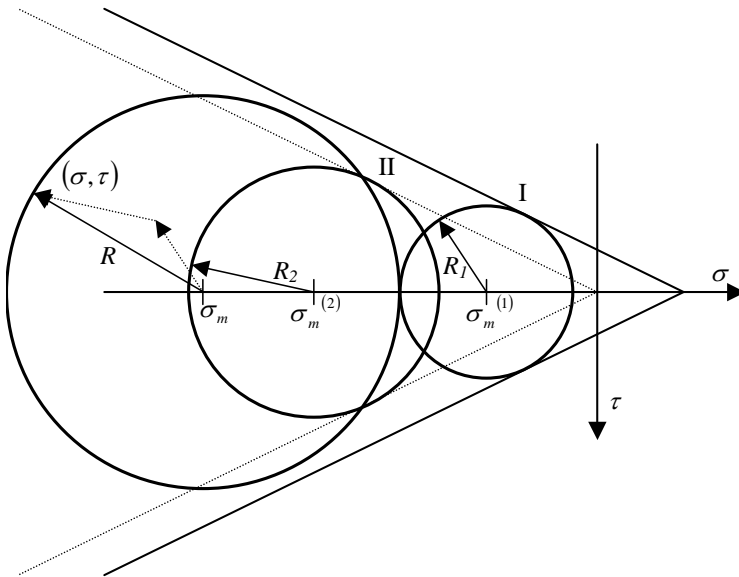


# 10 Jordtryksløsninger under hensyn til egenvægt

I dette afsnit behandles vægge i jord som alene er påvirket af egenvægtsbelastning. Såfremt jordoverfladen også er påvirket af en overfladelast kan jordtrykket fra denne last superponeres med andre løsninger, jf. reglerne for superposition, som gennemgås i afsnit 10.1.1.

## 10.1 Nedreværdiløsninger

### 10.1.1 Superposition af jordtryksløsninger



Figur 10.1: Superposition af spændingstilstande

Der ses på superposition af de to spændingstilstande I og II som vist i figur 10.1. Spændingstilstandene er karakteriseret ved deres middelspændinger  $\sigma_m^{(1)}$  og  $\sigma_m^{(2)}$ , og en spændingsvektor med længden hhv.  $R_1$  og  $R_2$ . Den superponerede spændingstilstand er karakteriseret ved sin middelspænding  $\sigma_m$ , som er summen af de to spændingstilstandes middelspændinger  $\sigma_m^{(1)}$  og  $\sigma_m^{(2)}$ , og ved spændingsvektoren  $R$  som er summen af spændingsvektorerne  $R_1$  og  $R_2$  (vektoraddition).

Spændingstilstanden I opfylder brudbetingelserne svarende til en friktionsvinkel  $\varphi$  og en kohæsion  $c$ . Spændingstilstanden II opfylder brudbetingelsen svarende til friktionsvinklen  $\varphi$  og kohæsionen 0. Denne opdeling skyldes, at det viser sig at en

superposition af spændingstilstande kun er tilladelig, når højst én af spændingstilstandene udnytter kohæsionen  $c$ .

Radierne på de Mohr'ske cirkler, se figur 10.1, som beskriver de to spændingstilstande, kan skrives:

$$R_1 = (c \cot \varphi - \sigma_m^{(1)}) \sin \varphi \quad (10.1)$$

$$R_2 = -\sigma_m^{(2)} \sin \varphi \quad (10.2)$$

Såfremt den superponerede spændingstilstand skal være tilladelig, må det gælde at radius for den Mohr'ske cirkel, der beskriver denne spændingstilstand, se figur 10.1, skal overholde følgende betingelse:

$$R \leq (c \cot \varphi - \sigma_m) \sin \varphi \quad (10.3)$$

Det ses, at  $R_1$  og  $R_2$  kan have en vilkårlig retning og kun deres længder er begrænset. Endvidere ses, at den superponerede spændingsvektor  $R$  får sin maksimale længde såfremt  $R_1$  og  $R_2$  har samme retning. I dette tilfælde vil længden, den superponerede spændingsvektor  $R$ , være summen af længderne af de to spændingsvektorer  $R_1$  og  $R_2$ .

Vi får hermed følgende krav:

$$R \leq R_1 + R_2 = (c \cot \varphi - \sigma_m^{(1)} - \sigma_m^{(2)}) \sin \varphi \quad (10.4)$$

Indføres

$$\sigma_m = \sigma_m^{(1)} + \sigma_m^{(2)} \quad (10.5)$$

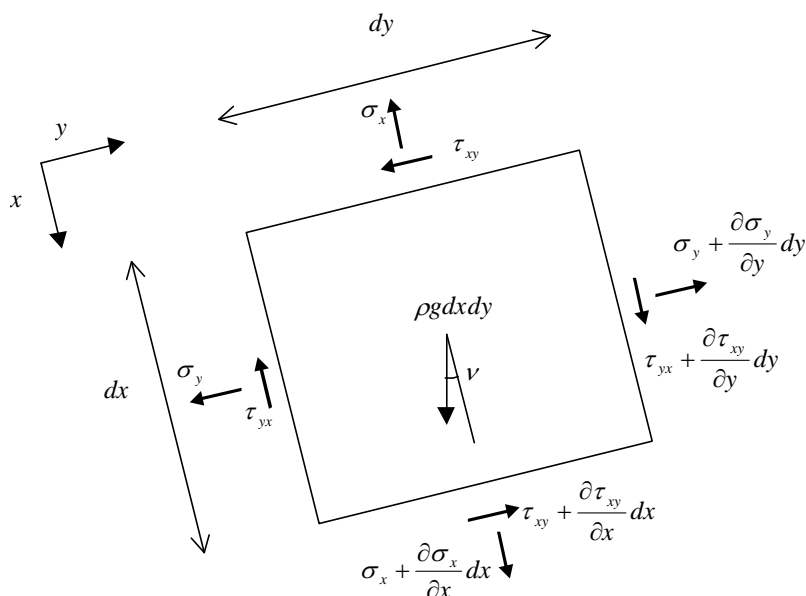
bliver (10.3) og (10.4) identiske. Det er hermed vist at for *nedreværdiløsninger* kan to tilladelige spændingstilstande superponeres såfremt man kun for den ene har medregnet kohæsionen  $c$ . Det ses ud fra figur 10.1 at denne superpositionslov er meget konservativ, såfremt de to spændingsvektorer  $R_1$  og  $R_2$  er modsat rettet.

## 10.1.2 Ligevægtsbetingelser

Ligevægtsbetingelserne i afsnit 2.1.1 ændres, når der tages hensyn til egenvægten, se [91,1]. Vi betegner densiteten med  $\rho$  og tyngdeaccelerationen med  $g$ .

Randbetingelserne er som før.

### 10.1.2.1 Rektangulære koordinater



Figur 10.2: Rektangulære koordinater

Ligevægtsbetingelserne for et infinitesimalt element under hensyn til egenvægten kan udledes vha. figur 10.2. Betegnelserne er som i afsnit 2.3.1.1. Tyngdekraften på det i figuren viste element er  $\rho g dx dy$  og danner vinklen  $\nu$  med  $x$ -aksen.

Rotationsligevægt om elementets midterpunkt:

$$\tau_{xy} dy \frac{1}{2} dx - \tau_{yx} dx \frac{1}{2} dy + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \frac{1}{2} dx - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \frac{1}{2} dy = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (10.6)$$

Projektion i  $x$ -aksens retning:

$$-\sigma_x dy + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \tau_{yx} dx + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx + \rho g \cos \nu dx dy = 0$$

Vha. (10.6) fås:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\rho g \cos \nu \quad (10.7)$$

Projektion i y-aksens retning:

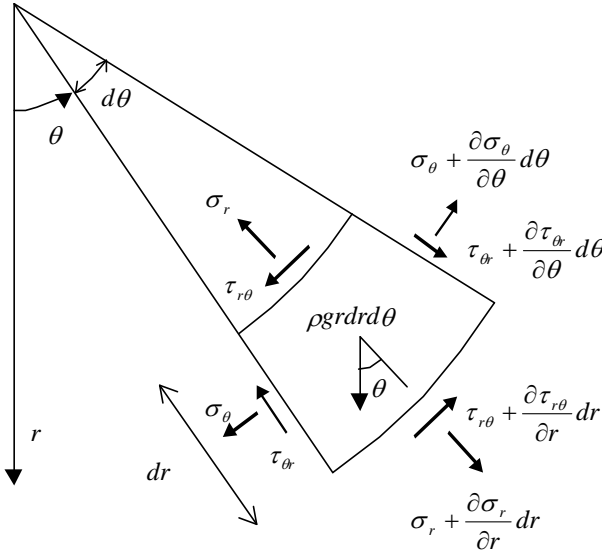
$$-\sigma_y dx + \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{xy} dy + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \rho g \sin \nu dx dy = 0$$

⇕

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \rho g \sin \nu \quad (10.8)$$

Dette er ligevægtsligningerne i rektangulære koordinater.

### 10.1.2.2 Polære koordinater



Figur 10.3: Polære koordinater

Der refereres til figur 10.3. Betegnelserne er som i afsnit 2.3.1.2. Tyngdekraften på det viste elementet er  $\rho g r dr d\theta$  og har samme retning som  $r$ -aksen.

Rotationsligevægt om elementets midterpunkt:

$$\tau_{r\theta} r d\theta \frac{1}{2} dr - \tau_{\theta r} dr \frac{1}{2} r d\theta + \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta \frac{1}{2} dr - \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{1}{2} r d\theta = 0$$

⇕

$$\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} \quad (10.9)$$



Ligevægtsbetingelserne udtrykkes normalt ved  $\tau_{r\theta}$ .

Radiær projektion:

$$\begin{aligned} & -\sigma_{\theta}dr + \left( \sigma_{\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \tau_{\theta r}rd\theta + \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} dr \right) (r + dr)d\theta \\ & + \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) drd\theta - \rho gr \sin \theta drd\theta = 0 \end{aligned}$$

Idet (10.9) er benyttet fås:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + 2\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} r = \rho gr \sin \theta \quad (10.10)$$

Projektion på  $\theta$ -retning:

$$\begin{aligned} & -\sigma_r rd\theta + \left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr)d\theta - \tau_{r\theta}dr + \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \\ & - \sigma_{\theta}drd\theta + \rho gr \cos \theta drd\theta = 0 \\ & \Downarrow \\ & \sigma_r - \sigma_{\theta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = -\rho gr \cos \theta \end{aligned} \quad (10.11)$$

### 10.1.3 Flydebetingelsen

Flydebetingelsen er uændret, dvs.:

$$|\tau| = c - \sigma \tan \varphi \quad (10.12)$$

Sammenhængen mellem forskydnings- og normalspændinger er som tidligere:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma \\ \sigma_t &= (1 + 2 \tan^2 \varphi) \sigma - 2c \tan \varphi \\ \tau_{nt} &= \pm (c - \sigma \tan \varphi) \end{aligned} \quad (10.13)$$

### 10.1.4 Rankine zonen

Rankine zonen, se afsnit 2.3.4, kan let udvides til også at gælde for et område med egenvægt. Spændingskomponenterne i  $x, y$ -koordinatsystemet er:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (1 + 2 \tan^2 \varphi) \sigma - 2c \tan \varphi \\ \sigma_y &= \sigma \\ \tau_{xy} &= \pm (c - \sigma \tan \varphi) \end{aligned} \quad (10.14)$$

Indsættes disse spændinger i ligevægtsligningerne i retvinklede koordinater, (10.7) og (10.8), fås to ligninger til bestemmelse af de statisk mulige spændingsfordelinger:

$$(1 + 2 \tan^2 \varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} \mp \tan \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial y} = -\rho g \cos \nu \quad (10.15)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} \mp \tan \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho g \sin \nu \quad (10.16)$$

Multipliseres den sidste ligning (10.16) med  $\pm \tan \varphi$  og adderes den til den første ligning (10.15), fås at:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho g \frac{\pm \sin \nu \tan \varphi - \cos \nu}{1 + \tan^2 \varphi} \quad (10.17)$$

Når (10.15) multipliceres med  $\pm \tan \varphi$  og (10.1) multipliceres med  $(1 + 2 \tan^2 \varphi)$  og ligningerne adderes fås:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \rho g \frac{\sin \nu (1 + 2 \tan^2 \varphi) \mp \cos \nu \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} \quad (10.18)$$

Det ses, at  $\frac{\partial \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)}{\partial y}$  er lig med  $\frac{\partial \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)}{\partial x}$ , dvs. at  $\sigma$  kan bestemmes ved integration langs en vilkårlig vej. Vi får således:

$$\sigma = \rho g \frac{\pm \sin \nu \tan \varphi - \cos \nu}{1 + \tan^2 \varphi} x + \rho g \frac{\sin \nu (1 + 2 \tan^2 \varphi) \mp \cos \nu \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} y + k \quad (10.19)$$

hvor  $k$  er en konstant, lig med  $\sigma$  i punktet (0,0).

I tilfældet af kohæsionsjord, kan (10.19) reduceres til:

$$\sigma = -\rho g x \cos \nu + \rho g y \sin \nu + k \quad (10.20)$$

### 10.1.5 Statisk tilladelig hældning for jordoverflade

En statisk tilladelig hældning for en jordoverflade, er en hældning, der svarer til en tilladelig spændingstilstand som opfylder randbetingelserne for overfladelasten. I tilfældet af en fri overflade, skal spændingerne på overfladen således være nul. Det er muligt at finde en sådan overflade for Rankine zonen, (10.14), idet denne giver et lineært forløb af spændingerne, dvs. det er muligt at finde en *nullinie*.

### 10.1.5.1 Kohæsionsjord

I tilfældet kohæsionsjord fås af (10.20):

$$\sigma = -\rho g x \cos \nu + \rho g y \sin \nu + k \quad (10.21)$$

Spændingerne bliver:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\rho g x \cos \nu + \rho g y \sin \nu + k \\ \sigma_y &= -\rho g x \cos \nu + \rho g y \sin \nu + k \\ \tau_{xy} &= \pm c \end{aligned} \quad (10.22)$$

Det ses, at nullinien danner en vinkel på  $\pm 45^\circ$  med y-retningen, da dette er den eneste mulighed for at få forskydningspændinger lig med nul. Nullinien ligger altså i snit med hovedspændingerne, der er:

$$\sigma_1 = -\rho g x \cos \nu + \rho g y \sin \nu + k + \frac{c}{2} \quad (10.23)$$

$$\sigma_2 = -\rho g x \cos \nu + \rho g y \sin \nu + k - \frac{c}{2} \quad (10.24)$$

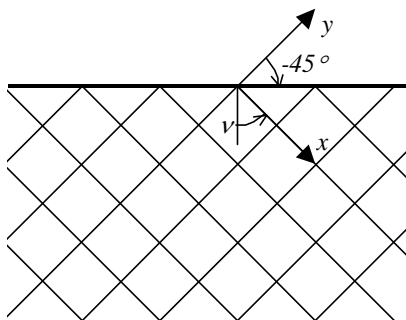
Ligningerne for nullinien i x,y-koordinatsystemet er,  $y = \pm x$ , hvor  $\pm$  betyder + eller -. Vælges at første hovedspænding skal være nul, skal  $k$  sættes til  $-c/2$ . Herved fås en ligning til bestemmelse af  $\nu$ :

$$-\rho g x \cos \nu \pm \rho g x \sin \nu = 0 \quad (10.25)$$

Da denne ligning skal være opfyldt for ethvert  $x$ , fås:

$$\begin{aligned} 1 &= \pm \tan \nu \\ \nu &= \pm 45^\circ \end{aligned} \quad (10.26)$$

Løsningen (10.26) gentages selvfølgelig med perioden  $\pi$ , men da det er de samme løsninger, der fremkommer, er disse ikke medtaget. Hældningen af jordoverfladen fås som tangens til summen af vinklen  $\nu$  og vinklen mellem nullinien og y-retningen, som vist i figur 10.4. Jordoverfladen vil som ventet være vandret.

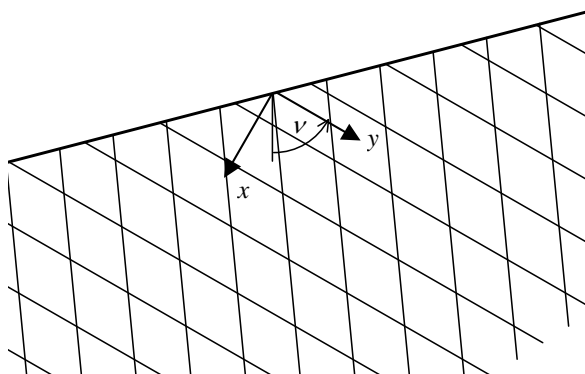


Figur 10.4: Hældning af fri overflade for kohæsionsjord

En kohæsionsjord kan altså ikke have en stabil skråning med stor udstrækning. Man kan dog godt have en skråning med en begrænset udstrækning. Man udnytter i dette

tilfælde ikke materialet til brud. Af denne grund fremkommer den velkendte løsning svarende til lodret, fri overflade med en højde, der giver spændinger mindre end eller lig med trykstyrken  $2c$ , ikke af ovenstående analyse.

### 10.1.5.2 Friktionsjord



Figur 10.5: Hældning af fri overflade for friktionsjord

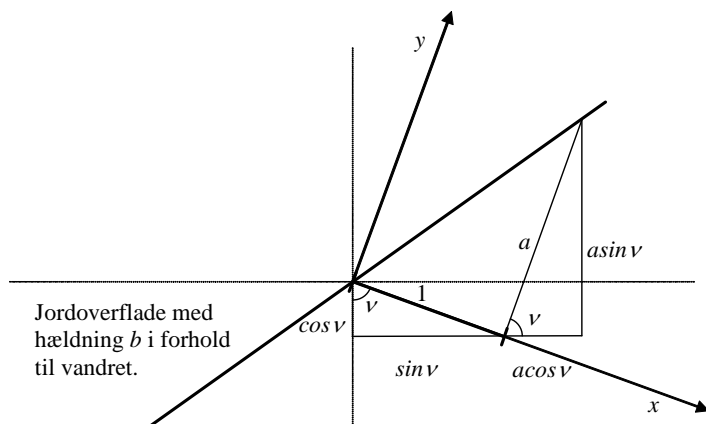
I tilfældet friktionsjord, ses det af (10.14), at for  $\sigma=0$  er alle spændinger lig med nul. Dvs. at betingelsen  $\sigma=0$  giver en ligning til bestemmelse af nullinien:

$$\sigma = \rho g \frac{\pm \sin \nu \tan \varphi - \cos \nu}{1 + \tan^2 \varphi} x + \rho g \frac{\sin \nu (1 + 2 \tan^2 \varphi) \mp \cos \nu \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} y + k = 0 \quad (10.27)$$

Den vinkel nullinien danner med lodret afhænger af den vinkel  $\nu$ , som  $x$ ,  $y$ -koordinatsystemet danner med lodret, se figur 10.2. Her vælges  $x$ ,  $y$ -koordinatsystemet således at origo ligger på overfladen, dvs. at konstanten  $k$  nul.

Nulliniens hældning  $a$  i  $x, y$ -koordinatsystemet er iht. (10.27):

$$a = \frac{y}{x} = - \frac{\pm \sin \nu \tan \varphi - \cos \nu}{\sin \nu (1 + 2 \tan^2 \varphi) \mp \cos \nu \tan \varphi} \quad (10.28)$$



Figur 10.6: Placering af x,y-koordinatsystem og jordoverflade

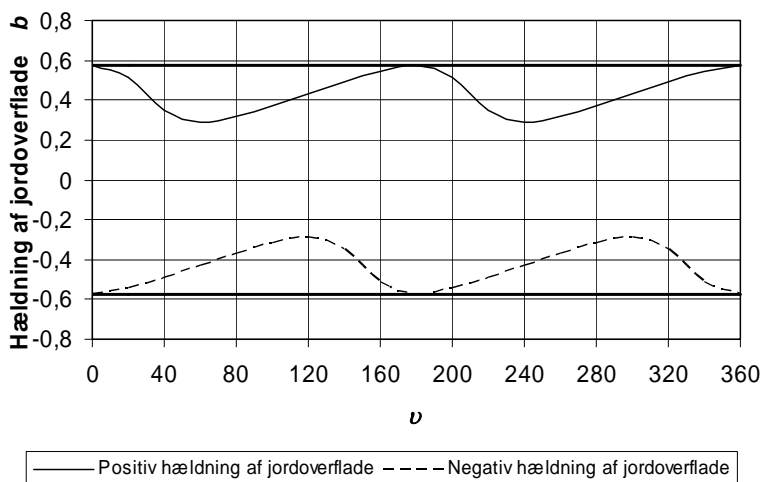
Af figur 10.6 ses, at hældningen af nullinien, dvs. den fri overflade, i forhold til vandret, er givet ved:

$$b = \frac{a \sin v - \cos v}{a \cos v + \sin v}$$

Indsættes (10.28) heri, fås:

$$b = \frac{\pm \tan \varphi - 2 \cos v \sin v \tan^2 \varphi}{1 + 2 \sin^2 v \tan^2 \varphi \mp 2 \cos v \sin v \tan \varphi}$$

I figur 10.7 er  $b$  vist som funktion af  $v$  for  $\varphi=30^\circ$ . De i figuren viste fede streger svarer til en hældning  $b$  lig med friktionskoefficienten  $\pm \mu = \pm \tan \varphi$ .



Figur 10.7: Hældning  $b$  af jordoverflade som funktion af  $v$ , friktionsvinkel  $\varphi=30^\circ$

Ønskes numerisk største hældning af den fri overflade, må hældningen optimeres med hensyn til  $\nu$ , hvilket giver  $\nu=n\pi$ . Uanset værdien af friktionskoefficienten, fås altså at den numerisk største hældningen af jordoverfladen bliver  $\pm\mu=\pm\tan\varphi$ .

For friktions- og kohæsionsjord er den statisk tilladelige hældning den samme som for friktionsjord, specielt er den optimerede hældning  $\pm\mu=\pm\tan\varphi$ .

### 10.1.6 Prandtl zonen

I et polært koordinatsystem  $r, \theta$  tilfredsstilles flydebetingelsen af spændingerne:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= (1 + 2\tan^2 \varphi)\sigma - 2c \tan \varphi \\ \sigma_r &= \sigma \\ \tau_{r\theta} &= \pm(c - \sigma \tan \varphi)\end{aligned}\tag{10.29}$$

Indsættes spændingerne (10.29) i ligevægtsligningerne, (10.10) og (10.11), fås to ligninger til bestemmelse af statiske mulige spændingsfelter:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \pm 2(c - \sigma \tan \varphi) \mp \tan \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial r} r = \rho g r \sin \theta\tag{10.30}$$

$$2\sigma \tan^2 \varphi - 2c \tan \varphi + (1 + 2\tan^2 \varphi) \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r \mp \tan \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = -\rho g r \cos \theta\tag{10.31}$$

Løses disse ligninger mht.  $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}$  og  $\frac{\partial \sigma}{\partial r}$ , og beregnes de blandede 2. afledede finder man, at disse bliver forskellige. Dette betyder, at ligningerne (10.30) og (10.31) ikke har nogen løsning for spændingsfeltet  $\sigma$ . Prandtl zonen er derfor ikke en nedreværdiløsning for kohæsions- og friktionsjord i tilfældet med egenvægt.

For kohæsionsjord kan (10.30) og (10.31) reduceres til:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \pm 2c = \rho g r \sin \theta\tag{10.32}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r = -\rho g r \cos \theta\tag{10.33}$$

Løsningen til disse ligninger lyder:

$$\sigma = \mp 2c\theta - \rho g r \cos \theta + k\tag{10.34}$$

hvor  $k$  er en konstant.

## 10.2 Øvreværdiløsninger

Medtagelse af egenvægten giver ingen ændring af de geometriske betingelser og flydeloven. Disse kan opstilles som i afsnit 2.4.1 og 2.4.2. I arbejdslikningen må tyngdekræfternes arbejde naturligvis medtages. Er flytningerne i lodret retning  $u_L$  regnet positivt i tyngdens retning, er det ydre arbejde af tyngdekræfterne:

$$A_p = \int_V u_L \rho g dV \quad (10.35)$$

Her er  $V$  volumenet af jorden.



# 11 Eksakte løsninger under hensyn til egenvægt

I det følgende vises, hvorledes løsningerne i kapitel 4 kan udvides, når egenvægten medtages.

For statisk tilladelige løsninger skal nu benyttes ligevægtsligningerne i afsnit 10.1.2. Øvreværdiløsninger udledes ved benyttelse af de samme flytningsfelter, eneste ændring i arbejdsfunktionen er derfor, at arbejdet (10.35) skal medtages.

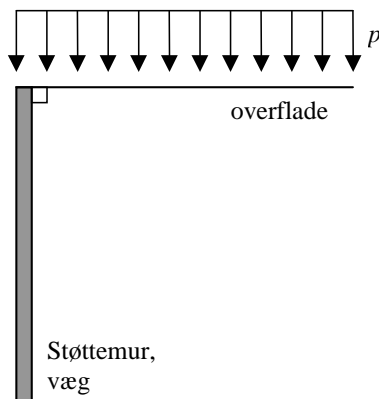
I kapitel 4 indførtes betegnelserne:

$A_c$ : Totale dissipation pr. enhedstykkel.

$A_p$ : Arbejde fra jævnt fordelt overfladelast pr. enhedstykkel.

Her benyttes yderligere betegnelsen:

$A_\rho$ : Arbejde fra egenvægten pr. enhedstykkel



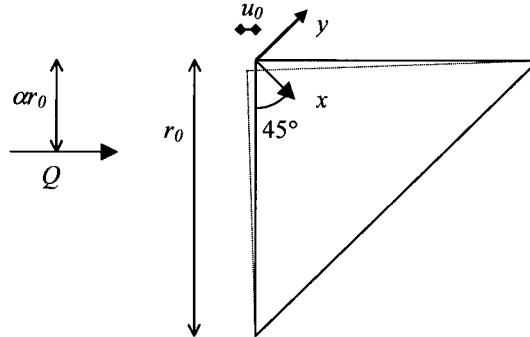
Figur 11.1: Principskitse af støttemur, væg

For alle løsninger gælder at væggen er lodret og at vinklen mellem væg og overflade er ret som vist i figur 11.1. Overfladen er påvirket af spændingen  $p$  (tryknormalspænding).

I øvreværdiløsninger medtages jordtrykkets arbejde som arbejdet ligesom i kapitel 4 fra en ydre last  $Q$ . Jordtrykket bestemmes ved at differentiere  $Q$  mht. en lodret koordinat. Arbejdet fra  $Q$  betegnes  $A_Q$ . Det søgte jordtryk betegnes  $q$  ( $q_p$ ,  $q_c$ ,  $q_\rho$  etc.).

## 11.1 Støttemure i kohæsionsjord

### 11.1.1 Glat væg



Figur 11.2: Betegnelse for flytninger

#### Øvre værdiløsning.

Flytningsfeltet er som i afsnit 4.1.1, dvs:

$$u_x = 0$$

$$u_y = -\sqrt{2}u_0 \left( 1 - \sqrt{2} \frac{x}{r_0} \right)$$

Koordinatsystemet mv. er vist i figur 11.2.

Tøjningstilstanden bliver derved også den samme:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 2 \frac{u_0}{r_0}$$

Fra afsnit 4.1.1 fås derved:

$$A_c = cu_0 r_0$$

$$A_p = \frac{1}{2} p r_0 u_0$$

$$A_Q = -u_0 Q (1 - \alpha)$$

Egenvægtsarbejde:

$$A_\rho = \int_0^{\frac{\sqrt{2}r_0}{2}} \int_{-x}^x \rho g u_L dy dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}r_0}{2}} \int_{-x}^x \rho g u_0 \left( 1 - \sqrt{2} \frac{x}{r_0} \right) dy dx$$

$$A_p = \int_0^{\frac{\sqrt{2}r_0}{2}} 2\rho g u_0 \left(1 - \sqrt{2} \frac{x}{r_0}\right) x dx = \frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2$$

Arbejds ligning:

$$A_p + A_Q + A_\rho = A_c$$

$$(1-\alpha)u_0 Q = \frac{1}{2} p r_0 u_0 + \frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2 - c r_0 u_0$$

$$Q = \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{2} p r_0 + \frac{1}{6} \rho g r_0^2 - c r_0 \right)$$

Jordtrykket bliver altså:

$$q = \frac{dQ}{dr_0} = \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{2} p + \frac{1}{3} \rho g r_0 - c \right)$$

Bidrag fra overfladelast, kohæsion og egenvægt, hhv.  $q_p$ ,  $q_c$  og  $q_\rho$ , bliver:

$$q_p = \frac{1}{1-\alpha_p} \frac{1}{2} p = \text{konstant, dvs. } \alpha_p = \frac{1}{2}$$

$$q_c = \frac{1}{1-\alpha_c} c = \text{konstant, dvs. } \alpha_c = \frac{1}{2}$$

$$q_\rho = \frac{1}{1-\alpha_\rho} \frac{1}{3} \rho g r_0 \text{ der er proportional med } r_0, \text{ dvs. } \alpha_\rho = \frac{2}{3}$$

Jordtrykket bliver altså:

$$q = p + \rho g r_0 - 2c$$

Nedreværdiløsning.

Spændningstilstanden sættes forsøgsvis til:

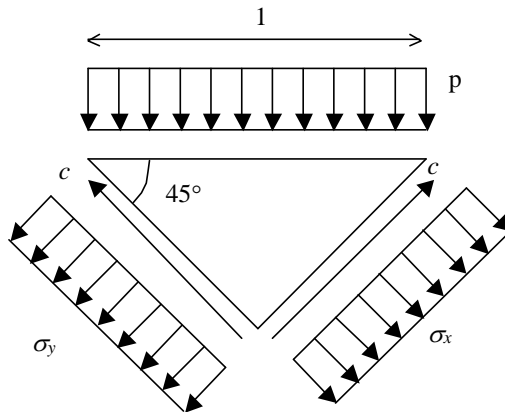
$$\sigma_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho g x + \frac{\sqrt{2}}{2} \rho g y - k$$

$$\sigma_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho g x + \frac{\sqrt{2}}{2} \rho g y - k$$

$$\tau_{xy} = c$$

der opfylder ligevægtsbetingelserne (10.7) og (10.8), når k er konstant.

Da  $\sigma_x = \sigma_y$  og  $\tau_{xy} = c$  ses det umiddelbart, at flydebetingelsen er tilfredsstillet.



Figur 11.3: Betegnelse for spændinger langs overflade

Lodret projektion for et punkt på den vandrette overflade kræver:

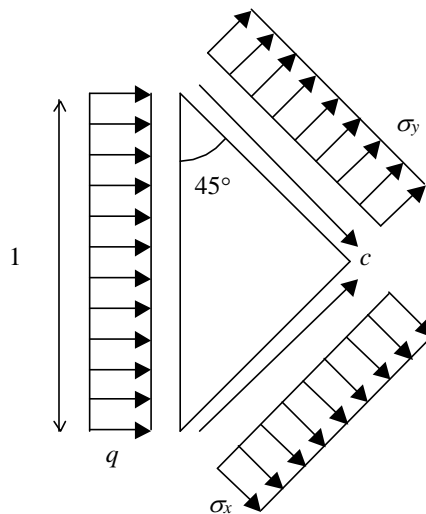
$$p - c + \frac{1}{2}\sigma_x(x, y = x) + \frac{1}{2}\sigma_y(x, y = x) = 0$$

der giver

$$p - c + k = 0$$

dvs.

$$k = -p + c$$



Figur 11.4: Betegnelse for spændinger langs væg

Vandret projektion for et punkt langs væggen:

$$q + c + \frac{1}{2} \sigma_x \left( x = -y = \frac{\sqrt{2} r_0}{2} \right) + \frac{1}{2} \sigma_y \left( x = -y = \frac{\sqrt{2} r_0}{2} \right) = 0$$

$$q = -c - \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho g \frac{\sqrt{2} r_0}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \rho g \frac{\sqrt{2} r_0}{2} + k - p + c \right)$$

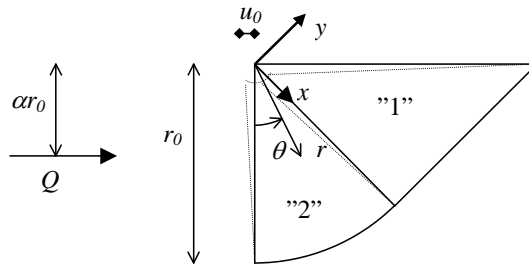
$$- \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho g \frac{\sqrt{2} r_0}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \rho g \frac{\sqrt{2} r_0}{2} + k - p + c \right)$$

dvs.

$$q = p + \rho g r_0 - 2c$$

Løsningen er den samme som øvre værdiløsningen, dvs. den er eksakt. Løsningen svarer til den i praksis anvendte, der er baseret på Brinch Hansens teori [53.1], se nærmere herom i kapitel 17.

### 11.1.2 Ru væg



Figur 11.5: Betegnelse for flytninger

#### Øvre værdiløsning.

Vi benytter samme flytningstilstand som i afsnit 4.1.2:

Flytninger i felt 2

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = - \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right) u_0$$

Koordinatsystemet mv. er vist i figur 11.5.

Tøjningerne i felt 2 bliver da:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r = 0$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta = \frac{u_0}{r_0} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) u_0 = \frac{u_0}{r}$$

Overgangsbetingelsen mellem felt 1 og 2 er:

For  $\theta = \frac{\pi}{4}$  er  $u_y = u_\theta(r=x)$  og  $u_x = u_r$ ,

der er opfyldt, hvis vi i felt 1 sætter:

$$u_x = 0$$

$$u_y = -u_0 \left(1 - \frac{x}{r_0}\right)$$

Tøjningerne i felt 1 bliver så:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{u_0}{r_0}$$

Fra afsnit 4.1.2:

$$A_c = \frac{\pi}{4} c u_0 r_0 + \frac{1}{2} c u_0 r_0$$

$$A_p = \frac{1}{2} p r_0 u_0$$

$$A_Q = -u_0 Q(1 - \alpha)$$

Egensvægtarbejde:

$$\begin{aligned} A_\rho &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{r_0} \rho g u_L r dr d\theta + \int_0^{r_0} \int_0^x \rho g u_L dy dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{r_0} \rho g \sin \theta \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) u_0 r dr d\theta + \int_0^{r_0} \int_0^x \rho g \frac{u_0}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x}{r_0}\right) dy dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2 \sin \theta d\theta + \int_0^{r_0} \rho g \frac{u_0}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x}{r_0}\right) x dx \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{12} \rho g u_0 r_0^2 + \frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2 + \frac{\sqrt{2}}{12} \rho g u_0 r_0^2 = \frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2 \end{aligned}$$

Herved bliver arbejdsligningen:

$$A_p + A_Q + A_\rho = A_c$$

$$(1 - \alpha) u_0 Q = \frac{1}{2} p r_0 u_0 + \frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) c r_0 u_0$$

der giver:

$$Q = \frac{1}{(1-\alpha)} \left( \frac{1}{2} p r_0 + \frac{1}{6} \rho g r_0^2 - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) c r_0 \right)$$

Jordtrykket findes herved til:

$$q = \frac{dQ}{dr_0} = \frac{1}{(1-\alpha)} \left( \frac{1}{2} p + \frac{1}{6} \rho g r_0 - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) c \right)$$

Bidragene  $q_p$ ,  $q_c$  og  $q_\rho$  bliver da:

$$q_p = \frac{1}{1-\alpha_p} \frac{1}{2} p = \text{konstant, dvs. } \alpha_p = \frac{1}{2}$$

$$q_c = \frac{1}{1-\alpha_c} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) c = \text{konstant, dvs. } \alpha_c = \frac{1}{2}$$

$$q_\rho = \frac{1}{1-\alpha_\rho} \frac{1}{3} \rho g r_0 \text{ der er proportional med } r_0, \text{ dvs. } \alpha_\rho = \frac{2}{3}$$

Jordtrykket bliver således:

$$q = p + \rho g r_0 - \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) c$$

Nedreværdiløsning.

Spændingstilstand i felt 1 sættes som for glat væg til:

$$\sigma_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho g x + \frac{\sqrt{2}}{2} \rho g y - p + c$$

$$\sigma_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho g x + \frac{\sqrt{2}}{2} \rho g y - p + c$$

$$\tau_{xy} = c$$

Overgangsbetingelser imellem zone 1 og 2 ( $y=0$ ,  $x=r$ ):

$$\sigma_\theta = \sigma_y (x=r, y=0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho g r - p + c$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{xy} = c$$

Vi sætter forsøgsvis, idet  $k$  er en konstant, jf. (10.34):

$$\sigma_\theta(r, \theta) = -2c\theta - \rho g r \cos \theta + k$$

og får da overgangsbetingelsen for  $\theta = \frac{\pi}{4}$ :

$$\sigma_\theta \left( r, \theta = \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} c - \frac{\sqrt{2}}{2} \rho g r + k = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho g r - p + c$$

der er opfyldt hvis

$$k = -p + c + \frac{\pi}{2}c$$

Herved fås:

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = -2c\theta - \rho g r \cos \theta - p + \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)c$$

Jordtrykket findes herefter til:

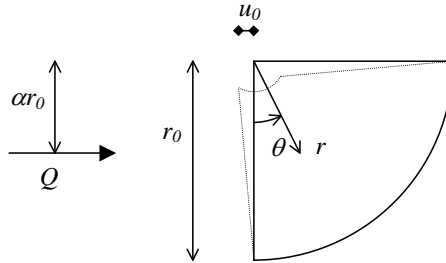
$$q = -\sigma_{\theta}(r, \theta = 0) = p + \rho g r - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)c$$

Både ligevægtsbetingelserne og flydebetingelsen er tilfredsstillet. Jordtrykket svarer til øvre værdiløsningen. Der er altså tale om en eksakt løsning.

Løsningen svarer til den i praksis anvendte, der er baseret på Brinch Hansens teori, [53.1], se nærmere herom i kapitel 17.

### 11.1.3 Ru væg, toplade

#### Øvre værdiløsning.



Figur 11.6: Betegnelse for flytninger

Vi benytter samme flytningstilstand som i afsnit 4.1.3, dvs.:

$$u_r = 0$$

$$u_{\theta} = -\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)u_0$$

Koordinatsystemet mv. er vist i figur 11.6.

Tøjningerne bliver:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r = 0$$



$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta = + \frac{u_0}{r_0} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) u_0 = \frac{u_0}{r}$$

Fra afsnit 4.1.3:

$$A_c = \frac{\pi}{2} c u_0 r_0$$

$$A_p = \frac{1}{2} p r_0 u_0$$

$$A_Q = -u_0 Q (1 - \alpha)$$

Egenvægtsarbejde:

$$\begin{aligned} A_\rho &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_0} \rho g r u_L dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_0} \rho g r \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) u_0 \sin \theta dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho g \frac{r_0^2}{6} u_0 \sin \theta d\theta = \frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2 \end{aligned}$$

Arbejds ligning:

$$A_p + A_Q + A_\rho = A_c$$

$$(1 - \alpha) u_0 Q = \frac{1}{2} p r_0 u_0 + \frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2 - \frac{\pi}{2} c r_0 u_0$$

Heraf findes:

$$Q = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p r_0 + \frac{1}{6} \rho g r_0^2 - \frac{\pi}{2} c r_0 \right)$$

Jordtrykket bliver:

$$q = \frac{dQ}{dr_0} = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p + \frac{1}{3} \rho g r_0 - \frac{\pi}{2} c \right)$$

Bidragene  $q_p$ ,  $q_c$  og  $q_\rho$  bliver da:

$$q_p = \frac{1}{1 - \alpha_p} \frac{1}{2} p = \text{konstant, dvs. } \alpha_p = \frac{1}{2}$$

$$q_c = \frac{1}{1 - \alpha_c} \frac{\pi}{2} c = \text{konstant, dvs. } \alpha_c = \frac{1}{2}$$

$$q_\rho = \frac{1}{1 - \alpha_\rho} \frac{1}{3} \rho g r_0 \text{ der er proportional med } r_0, \text{ dvs. } \alpha_\rho = \frac{2}{3}$$

Jordtrykket kan da skrives:

$$q = p + \rho g r_0 - \pi c$$

### Nedreværdiløsning.

Vi sætter forsøgsvis, idet  $k$  er en konstant, jf. formel (10.39),  
 $\sigma_\theta(r, \theta) = -2c\theta - \rho g r \cos \theta + k$

Randbetingelse:  $\theta = \frac{\pi}{2}; \sigma_\theta = -p$

$$\sigma_\theta\left(r, \theta = \frac{\pi}{2}\right) = -c\pi + k = -p$$

$\Downarrow$

$$k = c\pi - p$$

Herved bliver:

$$\sigma_\theta(r, \theta) = c(\pi - 2\theta) - p - \rho g r \cos \theta$$

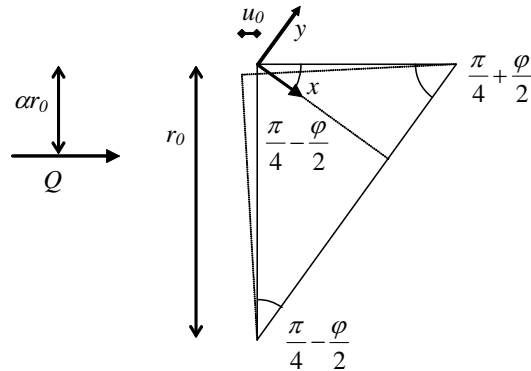
Jordtrykket bliver da:

$$q = -\sigma_\theta(r = r_0, \theta = 0) = p + \rho g r_0 - c\pi$$

Det ses, at ligevægtsbetingelserne og flydebetingelsen er opfyldte. Der er derfor tale om en nedreværdi. Løsningen svarer til øvreværdiløsningen. Den er derfor eksakt. Løsningen svarer til den i praksis anvendte, der er baseret på Brinch Hansens teori, [53.1], se nærmere herom i kapitel 17.

## 11.2 Støttemure i friktions- og kohæsionsjord

### 11.2.1 Glat væg



Figur 11.7: Betegnelse for flytninger

### Øvreværdiløsning.

For at lette beregningen af egenvægtsbidraget lægges x,y-koordinatsystemet som vist i figur 11.7. Flytningningerne er som i afsnit 4.2.1. Flytningsfeltet bliver i det nye koordinatsystem:

$$u_x = -\frac{u_0 \sin \varphi}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \left(1 - \frac{x}{r_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right)$$
$$u_y = -\frac{u_0 \cos \varphi}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \left(1 - \frac{x}{r_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right)$$

Hertil svarer tøjningerne:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{2u_0 \tan \varphi}{r_0}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{2u_0}{r_0}$$

Sammenlignes med formel (2.51) ses, at normalitetsbetingelsen er tilfredsstillet.

Da tøjningstilstanden er uændret i forhold til afsnit 4.2.1 er  $A_c$ ,  $A_p$  og  $A_Q$  uændret:

$$A_c = cu_0 r_0 \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi}$$
$$A_p = \frac{1}{2} pr_0 u_0 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$
$$A_Q = -u_0 Q(1 - \alpha)$$

Egenvægtsarbejdet bliver:

$$A_\rho = \int_0^{r_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \int_{-x \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}^{x \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \rho g u_L dy dx$$
$$= \int_0^{r_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \int_{-x \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}^{x \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \rho g u_0 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \left(1 - \frac{x}{r_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right) dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{r_0 \sin\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right)} \rho g u_0 \left( 1 - \frac{x}{r_0 \sin\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right)} \right) x \left( \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 1 \right) dx \\
&= \frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \left( \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 1 \right) \\
&= \frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2 \frac{1 - \sin \varphi}{2} \left( \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}
\end{aligned}$$

Arbejds ligningen bliver herved:

$$A_p + A_Q + A_\rho = A_c$$

eller

$$\frac{1}{2} p r_0 u_0 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - (1 - \alpha) u_0 Q + \frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = c u_0 r_0 \frac{(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi}$$

der giver

$$Q = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p r_0 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} + \frac{1}{6} \rho g r_0^2 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - c r_0 \frac{(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi} \right)$$

Jordtrykket bliver:

$$q = \frac{dQ}{dr_0} = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} + \frac{1}{3} \rho g r_0 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - c \frac{(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi} \right)$$

Bidraget  $q_p$ ,  $q_c$  og  $q_\rho$  til jordtrykket findes herefter til:

$$q_p = \frac{1}{1 - \alpha_p} \frac{1}{2} p \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \text{konstant, dvs. } \alpha_p = \frac{1}{2}$$

$$q_c = \frac{1}{1 - \alpha_c} c \frac{(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi} = \text{konstant, dvs. } \alpha_c = \frac{1}{2}$$

$$q_\rho = \frac{1}{1 - \alpha_\rho} \frac{1}{3} \rho g r_0 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \text{ der er proportional med } r_0 \text{ dvs. } \alpha_\rho = \frac{2}{3}$$

Herved bliver jordtrykket:

$$q = p \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} + \rho g r_0 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - 2c \frac{(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi}$$

### Nedreværdiløsning.

Vi går nu tilbage til koordinatsystemet i afsnit 4.2.1 vist i figur 4.7. Vinklen  $\nu$  i formlerne (10.7) og (10.8) er lig med  $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ . Ifgl.formel (2.9) gælder generelt:

$$\sigma_x = (1 + 2 \tan^2 \varphi) \sigma - 2c \tan \varphi$$

$$\sigma_y = \sigma$$

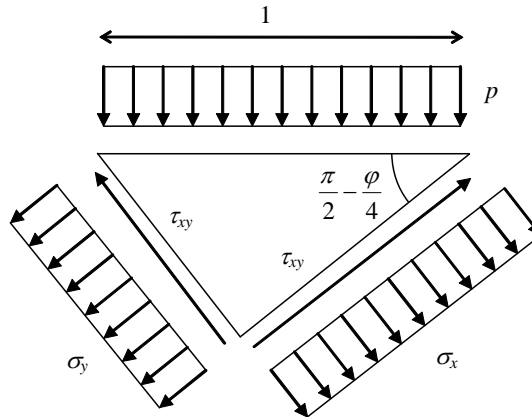
$$\tau_{xy} = \pm(c - \sigma \tan \varphi)$$

Af (10.19) følger

$$\sigma = \rho g \frac{\sin \nu \tan \varphi - \cos \nu}{1 + \tan^2 \varphi} x + \rho g \frac{\sin \nu (1 + 2 \tan^2 \varphi) - \cos \nu \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} y + k$$

hvor  $k$  er en konstant.

Spændingstilstanden tilfredsstiller ligevægtsbetingelserne og flydebetingelsen.



Figur 11.8: Betegnelse for spændinger for et punkt på overfladen

I et punkt på overfladen haves at  $x = y \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ , hvilket betyder at ved overfladen er  $\sigma = k$ .

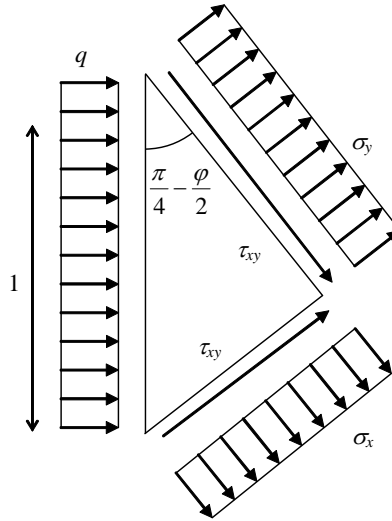
Lodret projektion giver betingelsen:

$$-p = \sigma_x \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \sigma_y \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - 2\tau_{xy} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$-p = \frac{1}{2} \left[ (1 + 2 \tan^2 \varphi) k - 2c \tan \varphi \right] (1 + \sin \varphi) + \frac{1}{2} [k] (1 - \sin \varphi) - [(c - k \tan \varphi)] \cos \varphi$$

der fører til:

$$k = \frac{-p + c \tan \varphi (1 + \sin \varphi) + c \cos \varphi}{1 + \tan^2 \varphi (1 + \sin \varphi) + \sin \varphi} = -p(1 - \sin \varphi) + c \cos \varphi$$



Figur 11.9: Betegnelse for spændinger for et punkt langs væggen

Vandret projektion for et punkt langs væggen giver:

$$-q = \sigma_x \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \sigma_y \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 2\tau_{xy} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Indsættes at  $x = r_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ , og at  $y = -r_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$  fås:

$$q = p \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} + \rho g r_0 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - 2c \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Dette er samme løsning som øvre værdiløsningen. Løsningen er derfor eksakt. Løsningen svarer til den i praksis anvendte, der er baseret på Brinch Hansens teori [53.1], se nærmere herom i kapitel 17.

### 11.2.2 Ru væg

Der findes ingen eksakt løsning svarende til løsningen i afsnit 4.2.2.

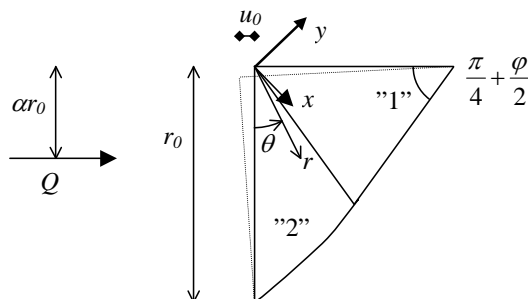
Felt 2 i figur 4.10, er en Prandtl zone, for hvilken der ikke eksisterer en løsning under hensyntagen til egenvægt.

### 11.2.3 Ru væg, topplade

Løsningen fra afsnit 4.2.3 kan ikke udvides til at gælde for jord med egenvægt, da der ikke eksisterer nogen løsning for denne zone under hensyntagen til egenvægt.

## 12 Øvreværdiløsninger under hensyntagen til egenvægt

### 12.1 Ru væg



Figur 12.1: Betegnelse for flytninger

#### Øvreværdiløsning.

Vi benytter samme flytningsfelt i felt 2 som i afsnit 4.2.2.

Flytningerne er derfor i felt 2:

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = -\left(1 - \frac{r}{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}}\right) u_0 e^{-\theta \tan \varphi}$$

Koordinatsystemet mv. er som vist i figur 12.1.

Tøjninger i felt 2:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{r} u_0 \tan \varphi e^{-\theta \tan \varphi}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta = \frac{u_0}{r_0} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}}\right) u_0 e^{-\theta \tan \varphi} = \frac{1}{r} u_0 e^{-\theta \tan \varphi}$$

Overgangen til felt 1 antages at ske for  $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$

For  $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$  er  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = -r \sin \varphi$  og  $u_y = u_\theta \cos \varphi$ ,  $u_x = u_\theta \sin \varphi$ .

Flytningstilstanden er kontinuert, når flytningerne i felt 1 forsøgsvis sættes til:

$$u_x = -u_0 \sin \varphi e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi} \left( 1 - \frac{x}{\cos \varphi r_0 e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi}} \right)$$

$$u_y = -u_0 \cos \varphi e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi} \left( 1 - \frac{x}{\cos \varphi r_0 e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi}} \right)$$

Tøjningerne i felt 1 bliver herved:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{u_0 \tan \varphi}{r_0}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{u_0}{r_0}$$

der tilfredsstiller normalitetsbetingelsen. Fra afsnit 4.2.2 har vi:

$$A_c = -\frac{cu_0 r_0}{2 \tan \varphi} \left( (1 - \sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi} - 1 \right)$$

$$A_p = \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi) p r_0 u_0 e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi}$$

$$A_Q = -u_0 Q (1 - \alpha)$$

Egenvægtsarbejdet bliver:

$$A_p = \int_0^{\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}} \int_0^{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}} \rho g u_L r dr d\theta + \int_0^{\cos \varphi r_0 e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi}} \int_{-x \tan \varphi}^{x \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \rho g u_L dy dx$$

$$A_p = \int_0^{\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}} \int_0^{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}} \rho g \sin \theta \left( 1 - \frac{r}{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}} \right) u_0 e^{-\theta \tan \varphi} r dr d\theta$$

$$+ \int_0^{\cos \varphi r_0 e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi}} \int_{-x \tan \varphi}^{x \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \rho g u_0 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi} \left( 1 - \frac{x}{\cos \varphi r_0 e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi}} \right) dy dx$$

$$A_p = \int_0^{\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}} \frac{1}{6} \rho g \sin \theta r_0^2 u_0 e^{-3\theta \tan \varphi} d\theta$$

$$+ \int_0^{\cos \varphi r_0 e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi}} \rho g u_0 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi} \left( 1 - \frac{x}{\cos \varphi r_0 e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi}} \right) \left( x \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + x \tan \varphi \right) dx$$



$$A_p = \frac{1}{6} \frac{\rho g r_0^2 u_0}{1 + 9 \tan^2 \varphi} \left( 1 - e^{-3 \left( \frac{\pi - \varphi}{4} \right) \tan \varphi} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + 3 \tan \varphi \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right) +$$

$$\frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2 \cos^2 \varphi \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{4} \right) e^{-3 \left( \frac{\pi - \varphi}{2} \right) \tan \varphi} \left( \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \tan \varphi \right)$$

$$A_p = \frac{1}{6} \frac{\rho g r_0^2 u_0}{1 + 9 \tan^2 \varphi} \left( 1 - e^{-3 \left( \frac{\pi - \varphi}{4} \right) \tan \varphi} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + 3 \tan \varphi \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right) +$$

$$\frac{1}{6} \rho g u_0 r_0^2 \cos \varphi \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{4} \right) e^{-3 \left( \frac{\pi - \varphi}{4} \right) \tan \varphi}$$

Arbejds ligningen kan nu opskrives:

$$A_p + A_Q + A_c = A_c$$

For overskuelighedens skyld indføres betegnelsen  $C$  givet ved:

$$A_p = \frac{1}{6} u_0 r_0^2 \rho g C$$

Arbejds ligningen kan da skrives:

$$(1 - \alpha) u_0 Q = \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi) p r_0 u_0 e^{-\left( \frac{\pi - \varphi}{2} \right) \tan \varphi} + \frac{1}{6} u_0 r_0^2 \rho g C + \frac{c u_0 r_0}{2 \tan \varphi} \left( (1 - \sin \varphi) e^{-\left( \frac{\pi - \varphi}{2} \right) \tan \varphi} - 1 \right)$$

Den giver:

$$Q = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi) p r_0 e^{-\left( \frac{\pi - \varphi}{2} \right) \tan \varphi} + \frac{1}{6} r_0^2 \rho g C + \frac{c r_0}{2 \tan \varphi} \left( (1 - \sin \varphi) e^{-\left( \frac{\pi - \varphi}{2} \right) \tan \varphi} - 1 \right) \right)$$

Jordtrykket bliver:

$$q = \frac{dQ}{dr_0} = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi) p e^{-\left( \frac{\pi - \varphi}{2} \right) \tan \varphi} + \frac{1}{3} r_0 \rho g C + 2c \cot \varphi \left( (1 - \sin \varphi) e^{-\left( \frac{\pi - \varphi}{2} \right) \tan \varphi} - 1 \right) \right)$$

Herved findes følgende bidrag  $q_p$ ,  $q_c$  og  $q_\rho$ :

$$q_p = \frac{1}{1 - \alpha_p} \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi) p e^{-\left( \frac{\pi - \varphi}{2} \right) \tan \varphi} = \text{konstant, dvs. } \alpha_p = \frac{1}{2}$$

$$q_c = \frac{1}{1 - \alpha_c} 2c \cot \varphi \left( (1 - \sin \varphi) e^{-\left( \frac{\pi - \varphi}{2} \right) \tan \varphi} - 1 \right) = \text{konstant, dvs. } \alpha_c = \frac{1}{2}$$

$$q_\rho = \frac{1}{1 - \alpha_\rho} \frac{1}{3} r_0 \rho g C \text{ der er proportional med } r_0, \text{ dvs. } \alpha_\rho = \frac{2}{3}$$

Størrelserne  $q_p$  og  $q_c$  har samme værdi som bestemt i afsnit 4.2.2.

Herved findes jordtrykket:

$$q = (1 - \sin \varphi) p e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi} + r_0 \rho g C - c \cot \varphi \left( (1 - \sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi} - 1 \right)$$

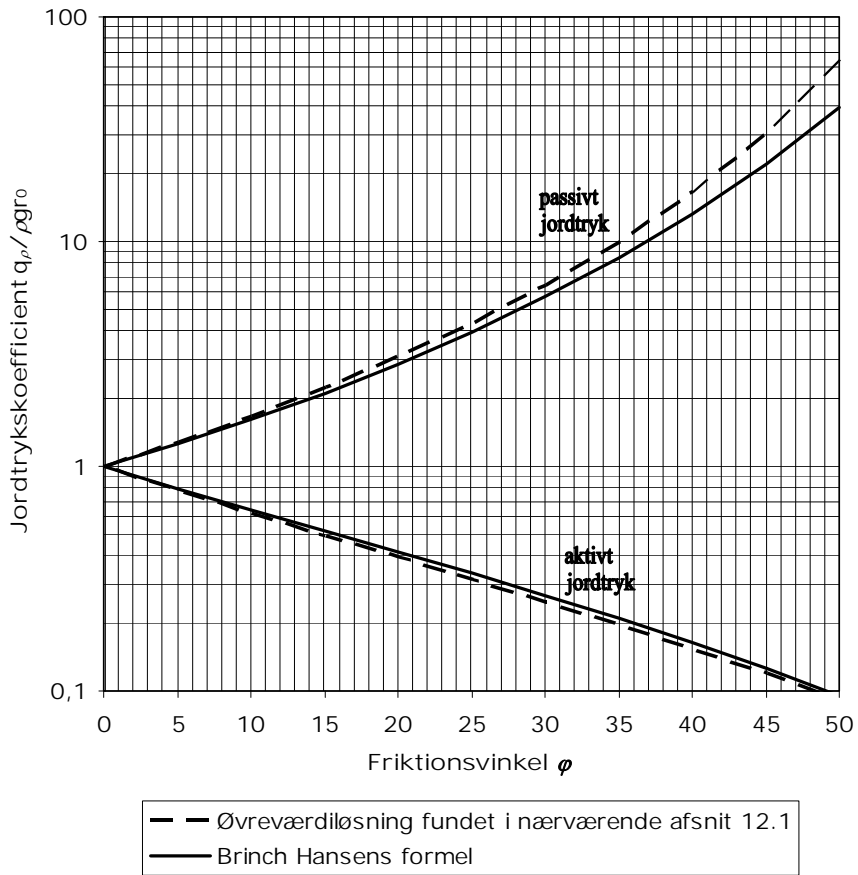
hvor

$$C = \frac{1}{1 + 9 \tan^2 \varphi} \left( 1 - e^{-3 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \tan \varphi} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + 3 \tan \varphi \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right) \\ + \cos \varphi \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{4} \right) e^{-3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{4} \right) \tan \varphi}$$

Løsningen for bidragene  $q_p$  og  $q_c$  til jordtrykket, som er identisk med løsningen fundet i afsnit 4.2.2 beregnet for vægtløs jord, svarer til den i praksis anvendte, der er baseret på Brinch Hansens teori [53.1], se nærmere herom i kapitel 17. For  $q_p$  har Brinch Hansen angivet en tilnærmelsesformel. Denne kan skrives:

$$\frac{q_c}{r_0 \rho g} \cong (1 - \sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi} + 0,007 (e^{-9 \sin \varphi} - 1)$$

I figur 12.2 er øvre værdiløsningen fundet i nærværende afsnit sammenlignet med Brinch Hansens tilnærmelsesformel. Det ses at løsningen fra dette afsnit ligger på den usikre side i forhold til Brinch Hansens formel, der formentlig giver en bedre løsning. Forskellen mellem de to løsninger er dog ikke større end at begge er brugbare i praksis.



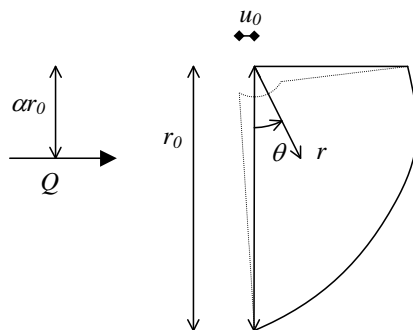
Figur 12.2: Sammenligning af jordtrykskoefficienter for tilfældet ru væg

I figur 12.2 er jordtrykskoefficienten  $\frac{q_p}{r_0 \rho g}$  vist for både aktivt og passivt tryk

## 12.2 Ru væg, topplade

### Øvreværdiløsning.

Vi benytter samme flytningsfelt som i afsnit 4.2.3.



Figur 12.3: Betegnelse for flytninger

Flytningerne er altså:

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = -\left(1 - \frac{r}{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}}\right) u_0 e^{-\theta \tan \varphi}$$

Koordinatsystemet mv. er vist i figur 12.3.

Tøjningerne bliver:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{r} u_0 \tan \varphi e^{-\theta \tan \varphi}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta = \frac{u_0}{r_0} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}}\right) u_0 e^{-\theta \tan \varphi} = \frac{1}{r} u_0 e^{-\theta \tan \varphi}$$

Fra afsnit 4.2.3 har vi:

$$A_c = \frac{c u_0 r_0}{2 \tan \varphi} (1 - e^{-\pi \tan \varphi}) d\theta$$

$$A_p = \frac{1}{2} p r_0 u_0 e^{-\pi \tan \varphi}$$

$$A_Q = -u_0 Q (1 - \alpha)$$

Egenvægtsarbejdet bliver:

$$\begin{aligned}
 A_p &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}} \rho g u_L r dr d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}} \rho g \sin \theta \left( 1 - \frac{r}{r_0 e^{-\theta \tan \varphi}} \right) u_0 e^{-\theta \tan \varphi} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6} \rho g r_0^2 \sin \theta u_0 e^{-3\theta \tan \varphi} d\theta \\
 &= \frac{1}{6} \rho g r_0^2 u_0 \frac{(1 - 3 \tan \varphi e^{-3\theta \tan \varphi})}{1 + 9 \tan^2 \varphi}
 \end{aligned}$$

Arbejds ligningen får derfor formen:

$$A_p + A_Q + A_\rho = A_c$$

eller

$$(1 - \alpha) u_0 Q = \frac{1}{2} p r_0 u_0 e^{-\pi \tan \varphi} + \frac{1}{6} \rho g r_0^2 u_0 \frac{(1 - 3 \tan \varphi e^{-3\theta \tan \varphi})}{1 + 9 \tan^2 \varphi} + \frac{c u_0 r_0}{2 \tan \varphi} (e^{-\pi \tan \varphi} - 1)$$

der giver

$$Q = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p r_0 e^{-\pi \tan \varphi} + \frac{1}{6} \rho g r_0^2 \frac{(1 - 3 \tan \varphi e^{-3\theta \tan \varphi})}{1 + 9 \tan^2 \varphi} - \frac{c r_0}{2 \tan \varphi} (e^{-\pi \tan \varphi} - 1) \right)$$

Jordtrykket bliver:

$$q = \frac{dQ}{dr_0} = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{2} p e^{-\pi \tan \varphi} + \frac{1}{3} \rho g r_0 \frac{(1 - 3 \tan \varphi e^{-3\theta \tan \varphi})}{1 + 9 \tan^2 \varphi} + \frac{c}{2 \tan \varphi} (e^{-\pi \tan \varphi} - 1) \right)$$

Bidragene fra  $q_p$ ,  $q_c$  og  $q_\rho$  findes til:

$$q_p = \frac{1}{1 - \alpha_p} \frac{1}{2} p e^{-\pi \tan \varphi} = \text{konstant, dvs. } \alpha_p = \frac{1}{2}$$

$$q_c = \frac{1}{1 - \alpha_c} \frac{c}{2 \tan \varphi} (e^{-\pi \tan \varphi} - 1) = \text{konstant, dvs. } \alpha_c = \frac{1}{2}$$

$$q_\rho = \frac{1}{1 - \alpha_\rho} \frac{1}{3} \rho g r_0 \frac{(1 - 3 \tan \varphi e^{-3\theta \tan \varphi})}{1 + 9 \tan^2 \varphi} \text{ der er proportional med } r_0, \text{ dvs. } \alpha_\rho = \frac{2}{3}$$

Bemærk at  $q_p$  og  $q_c$  har samme værdi som bestemt i afsnit 4.2.3.

Jordtrykket bliver herefter:

$$q = p e^{-\pi \tan \varphi} + \rho g r_0 \frac{(1 - 3 \tan \varphi e^{-3\theta \tan \varphi})}{1 + 9 \tan^2 \varphi} + c \cot \varphi (e^{-\pi \tan \varphi} - 1)$$



## 13 Diskontinuitetslinieløsninger

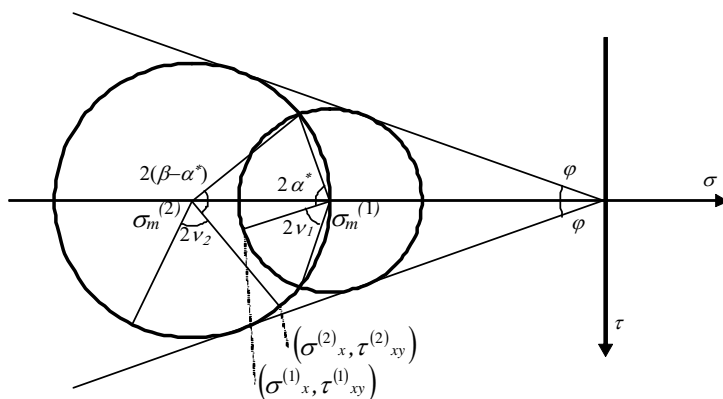
Diskontinuitetsløsningerne fra kaptitel 6 kan ikke uden videre benyttes, når der skal tages hensyn til egenvægten, idet vi ikke længere kan have homogene spændingsfelter. I Rankine zoner vil der i stedet være tale om spændingsfelter af typen (10.14) med  $\sigma$  givet ved (10.19). Kontinuitetskravene til spændingerne skal naturligvis være opfyldt i ethvert punkt. Når der ikke er tale om homogene felter, er det ikke nok at opstille kravene i et punkt.

Betragtes to zoner 1 og 2 på hver sin side af en ret diskontinuitetslinie er spændingsparametrene  $\sigma=\sigma_1$  for zone 1 og  $\sigma=\sigma_2$  for zone 2:

$$\sigma_1 = \rho g \frac{\pm \sin v_1 \tan \varphi - \cos v_1}{1 + \tan^2 \varphi} x_1 + \rho g \frac{\sin v_1 (1 + 2 \tan^2 \varphi) \mp \cos v_1 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} y_1 + k_1 = 0 \quad (13.1)$$

$$\sigma_2 = \rho g \frac{\pm \sin v_2 \tan \varphi - \cos v_2}{1 + \tan^2 \varphi} x_2 + \rho g \frac{\sin v_2 (1 + 2 \tan^2 \varphi) \mp \cos v_2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} y_2 + k_2 = 0 \quad (13.2)$$

Vinklen  $v_1$  kan bestemmes ved hjælp af randbetingelserne for overfladen, hvor  $k_1$  også kendes. Der er altså ingen frie parametre i zone 1. Vinklen  $v_2$  er fastlagt ved ruheden af væggen. Der er således kun to frie parametre, konstanten  $k_2$  og vinklen  $\alpha=\alpha^*$ , der bestemmer beliggenheden af diskontinuitetslinien, se f.eks. figur 8.1.



Figur 13.1: Mohr's cirkler for spændingsfelterne på hver side af en diskontinuitetslinie

For friktionsjord fås middelspændingerne til, se figur 13.1.:

$$\sigma_m^{(1)} = \sigma_1 (1 + \tan^2 \varphi) = \rho g (\pm \sin v_1 \tan \varphi - \cos v_1) x_1 + \rho g (\sin v_1 (1 + 2 \tan^2 \varphi) \mp \cos v_1 \tan \varphi) y_1 + k_1 (1 + \tan^2 \varphi) \quad (13.3)$$

$$\sigma_m^{(2)} = \sigma_2 (1 + \tan^2 \varphi) = \rho g (\pm \sin v_2 \tan \varphi - \cos v_2) x_2 + \rho g (\sin v_2 (1 + 2 \tan^2 \varphi) \mp \cos v_2 \tan \varphi) y_2 + k_2 (1 + \tan^2 \varphi) \quad (13.4)$$

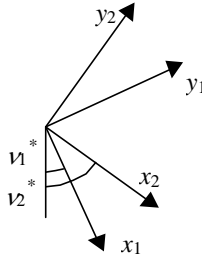
Her er  $k_1$  og  $k_2$  konstanter.

Kravet om kontinuitet af normalspændingerne vinkelret på diskontinuitetslinien giver:

$$\sigma_m^{(1)} \left( 1 + \sin \varphi \cos \left( 2(\alpha^* + v_1) + \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \sigma_m^{(2)} \left( 1 - \cos \left( 2(\beta - \alpha^* + v_2) - \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (13.5)$$

Kontinuitetsbetingelserne for forskydningspændingerne ved diskontinuitetslinien giver:

$$\sigma_m^{(1)} \sin \varphi \sin \left( 2(\alpha^* + v_1) + \varphi - \frac{\pi}{2} \right) = \sigma_m^{(2)} \sin \varphi \sin \left( 2(\beta - \alpha^* + v_2) - \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \quad (13.6)$$



Figur 13.2: Retvinklede koordinater i de to zoner

Introduceres to retvinklede koordinatsystemer i de to zoner med  $x_1$  og  $x_2$  langs det ene sæt af brudsnit, jf. figur 10.4 og figur 13.2, gælder:

$$x_1 = x_2 \cos(v_1^* - v_2^*) + y_2 \sin(v_1^* - v_2^*) \quad (13.7)$$

$$y_1 = -x_2 \sin(\alpha_1^* - \alpha_2^*) + y_2 \cos(\alpha_1^* - \alpha_2^*) \quad (13.8)$$

Indsættes (13.3), (13.4), (13.7) og (13.8) i (13.5) og (13.6), og indføres en koordinat  $r$  langs diskontinuitetslinien, fås at  $\alpha^*$  og  $k_2$  skal bestemmes udfra to ligninger af typen:

$$\begin{aligned} H_1 r + H_2 &= H_3 r + H_4 \\ H_5 r + H_6 &= H_7 r + H_8 \end{aligned} \quad (13.9)$$

hvor alle konstanterne  $H_{1-8}$  vil være afhængig af  $\alpha^*$ ,  $H_2$ ,  $H_4$ ,  $H_6$  og  $H_8$  vil endvidere være afhængig af  $k_2$ . Det vil kun i specielle tilfælde være muligt at løse disse ligninger. Problemet med egenvægt kan derfor ikke løses ved hjælp af en enkelt ret diskontinuitetslinie.



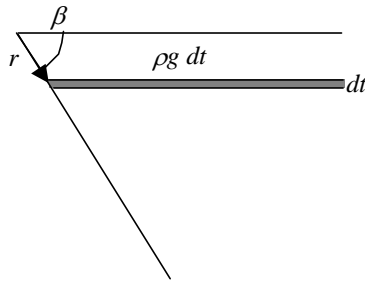
Problemet kan derimod løses vha. en krum diskontinuitetslinie som påvist af Sokolovskii [65.1]. De fundne spændingsfelter vil dog ikke være beskrevet af funktioner af type (13.1) og (13.2). De vil derfor kun i ganske få tilfælde kunne opfylde randbetingelserne.



## 14 Summation af diskontinuitetslinieløsninger

Belastningen fra egenvægt kan ses som en række jævnt fordelte belastninger langs strimler parallelle med jordoverfladen. Forholdene er illustreret for en vandret jordoverflade i figur 14.1. Strimlen har tykkelsen  $dt$  og vil derved give en jævnt fordelt belastning på  $\rho g dt$  på den underliggende jord. Denne belastning vil kun give jordtryk på væggen under strimmelen. Jordtrykket på væggen bestemmes ved summation af løsningerne for alle strimlerne over koordinaten  $r$ , hvor trykket ønskes bestemt.

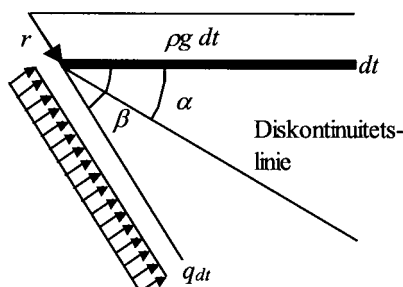
Såfremt egenvægten kun er en del af belastningen, må man kun medtage bidrag fra kohæsionen  $c$  én gang, jf. afsnit 10.1.1.



Figur 14.1: Opdeling af jorden i vandrette lag af tykkelsen  $dt$



## 15 Glat støttemur med vandret jordoverflade



Figur 15.1: Glat støttemur med vandret jordoverflade

Vi betragter det tilfælde, hvor jordtrykket på en væg alene stammer fra egenvægten af jorden. Tyngden af jorden for en strimmel giver en jævnt fordelt belastning  $\rho g dt$ , der giver et aktivt jordtryk på væggen. Vinklen mellem den vandrette overflade og væggen er  $\beta$ . Vinklen mellem en vandret linie og diskontinuitetslinien er  $\alpha$ . Denne vinkel er konstant for alle strimler  $dt$ . Størrelserne er vist på figur 15.1.

Normalspændinger regnes positive som træk. Belastninger og jordtryk er positive som tryk.

### 15.1 Friktionsjord

Fra (6.6) i afsnit 6.1 fås at bidraget fra strimlen vist i figur 15.1 er bestemt ved:

$$q_{dt} = \rho g \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} dt \quad (15.1)$$

Her er  $\alpha$  iflg. (6.5) givet ved:

$$\alpha = \frac{1}{2} [\text{Arc sin}(\sin \varphi \sin \beta) + \beta] \quad (15.2)$$

Tykkelsen  $dt$  af en strimmel kan udtrykkes ved en tilvækst i koordinaten  $r$ :

$$dt = dr \sin \beta \quad (15.3)$$

Jordtrykket fra egenvægten af jorden over koordinaten  $r$  er givet ved integralet af alle bidrag fra strimlerne over koordinaten  $r$ , dvs.:

$$q_p = \int_0^r q dr \quad (15.4)$$

Dette integral kan udregnes ved at indsætte (15.3) i (15.1) og integrere fra 0 til  $r$ :

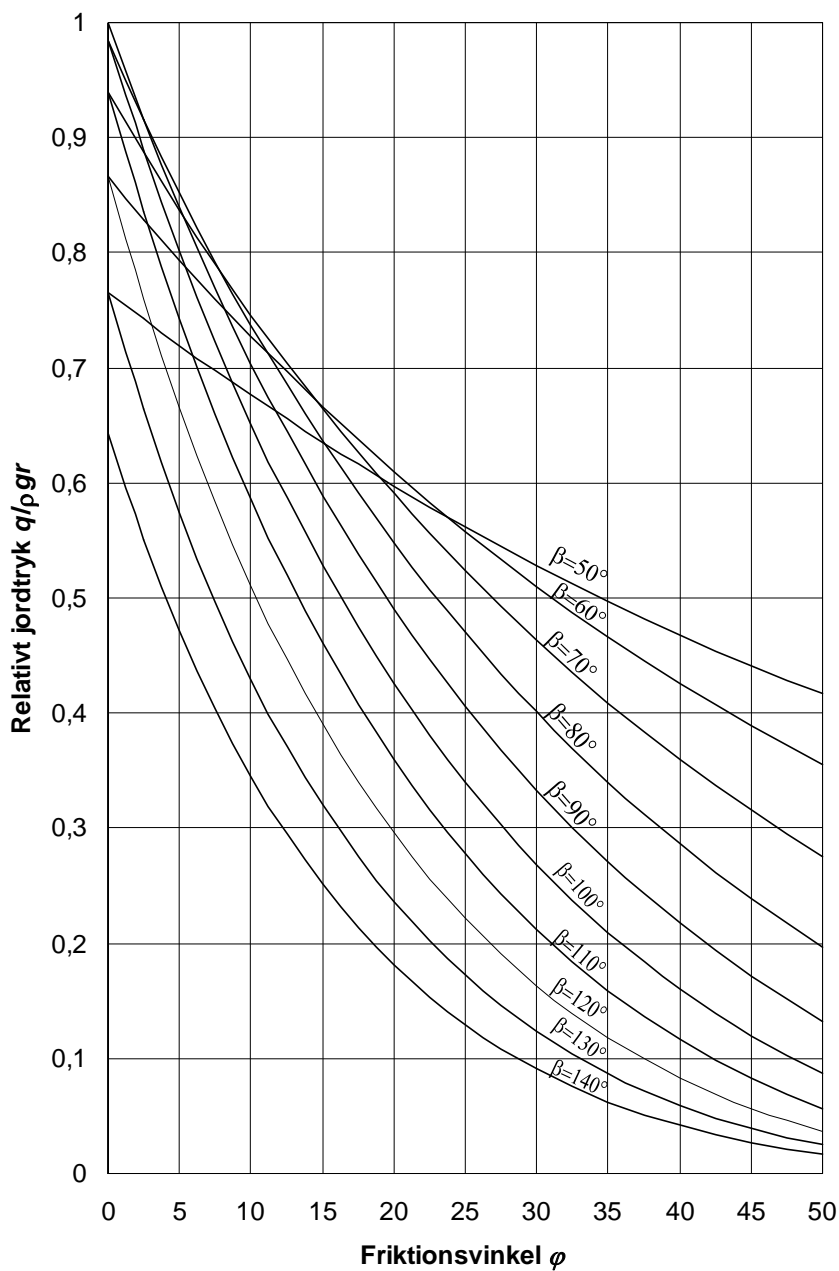
$$q_{\rho} = \int_0^r \rho g \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} \sin \beta dr \quad (15.5)$$

der giver:

$$q_{\rho} = \rho g r \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} \sin \beta \quad (15.6)$$

Vinklen  $\alpha$  bestemmes stadig ved (15.2).

I figur 15.2 er det relative jordtryk  $q/\rho g r$  vist som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$ . Kurverne er vist for forskellige værdier af vinklen  $\beta$ .



Figur 15.2: Det relative jordtryk  $q/\rho g r$  på glat støttemur for friktionsjord som funktion af friktionsvinklen  $\phi$  ved anvendelse af én diskontinuitetslinie

### 15.1.1 Anvendelse af flere diskontinuitetslinier

Ligesom ved beregning af jordtryk uden hensyntagen til egenvægt, er det muligt at anvende flere diskontinuitetslinier for at få en mere optimal løsning, når vinklen  $\beta$  bliver stor. Jordtrykket for en strimmel med tykkelsen  $dt$  bliver iflg. (9.7)

$$q_{dt} = \rho g \frac{1 - \cos(2\delta_2^*) \sin \varphi}{1 + \cos(2\delta_1^*) \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} dt \quad (15.7)$$

Når væggen som forudsat er glat sættes vinklen  $\delta_2^*$  til nul. Det samme er tilfældet for vinklen  $\delta_1^*$  idet belastningen fra egenvægten altid vil være en lodret nedadrettet last fra den vandrette strimmel med tykkelsen  $dt$ . Jordtrykket kan derfor findes ved integralet:

$$q_\rho = \int_0^r \rho g \sin \beta \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} dr \quad (15.8)$$

Formlen er kun gyldig for positive værdier af  $\theta$ , som er defineret ved (9.8), hvor vinklerne  $\delta_1^*$  og  $\delta_2^*$  er nul, dvs.:

$$\theta = 2\beta - \pi$$

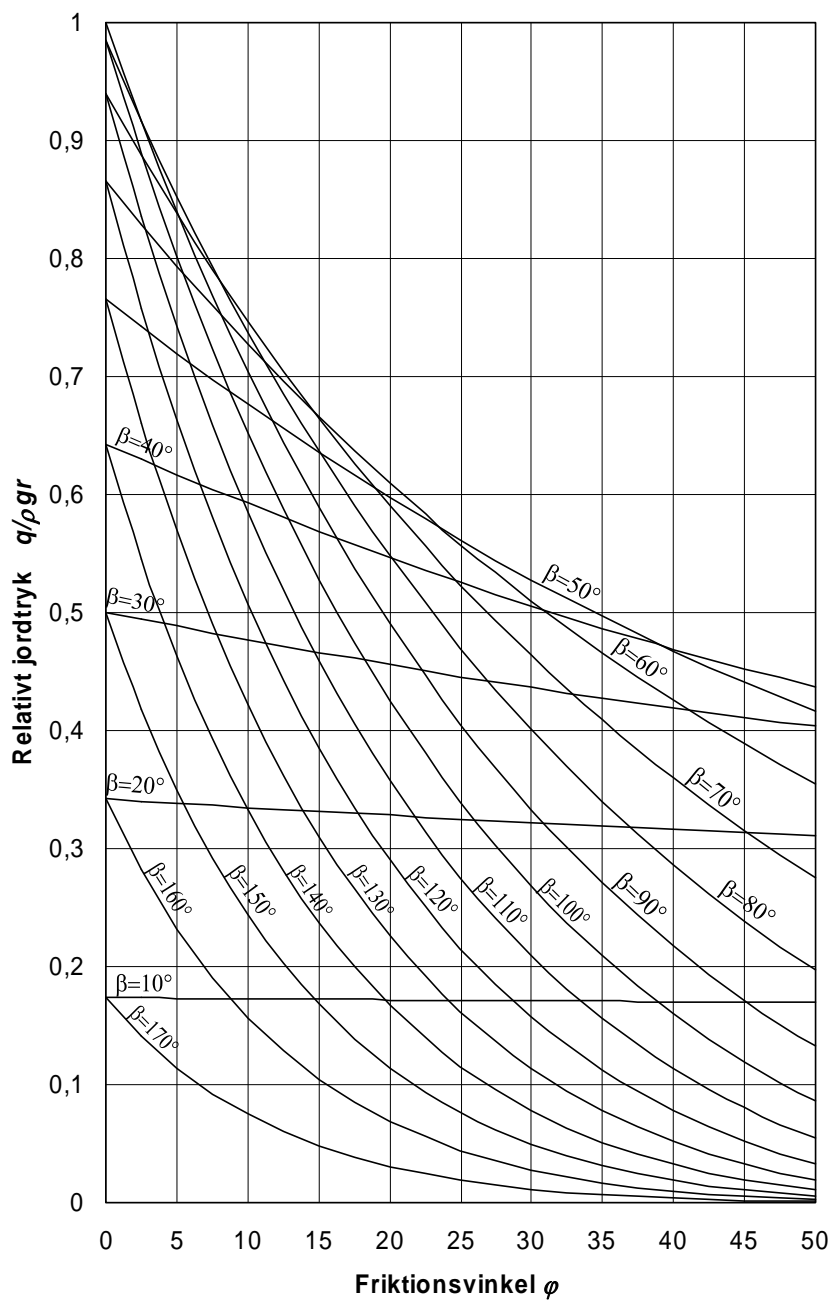
Løsningen til integralet (15.8), er givet ved:

$$q_\rho = \rho g r \sin \beta \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} \quad (15.9)$$

Denne løsning benyttes, når det er muligt, se afsnit 9.1, sammen med (15.6) hvorved vi får en bedre løsning. I figur 15.3 er det relative jordtryk  $q/\rho g r$  tegnet som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$ , idet der er benyttet uendelig mange diskontinuitetslinier, hvor det er muligt. Kurverne er tegnet for forskellige værdier af vinklen  $\beta$ .

Bemærk at for  $\beta=90^\circ$  reproducerer løsningen (15.9) den eksakte løsning fra afsnit 11.2.1.





Figur 15.3: Det relative jordtryk  $q/\rho g r$  på glat støttemur for friktionsjord som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$  ved anvendelse af én eller flere diskontinuitetslinier

## 15.2 Kohæsionsjord

Ved superposition af jordtryk fra strimlerne med tykkelsen  $dt$ , må styrken fra kohæsionen som nævnt kun medregnes i ét tilfælde. Kohæsionen medregnes for en strimmel beliggende ved jordoverfladen. Herved fås af (6.13) i afsnit 6.2 følgende bidrag til jordtrykket:

$$q = -2c(1 - \cos \beta) \quad (15.10)$$

Ved beregning af jordtrykket fra egenvægten skal kohæsionen sættes lig med nul. Derved fås at belastningen fra hver strimmel er givet ved:

$$q_{dt} = \rho g dt \quad (15.11)$$

Som før er:

$$dt = \sin \beta dr \quad (15.12)$$

Det resulterende jordtryk fås ved integration af (15.11), hvortil adderes bidraget fra (15.10):

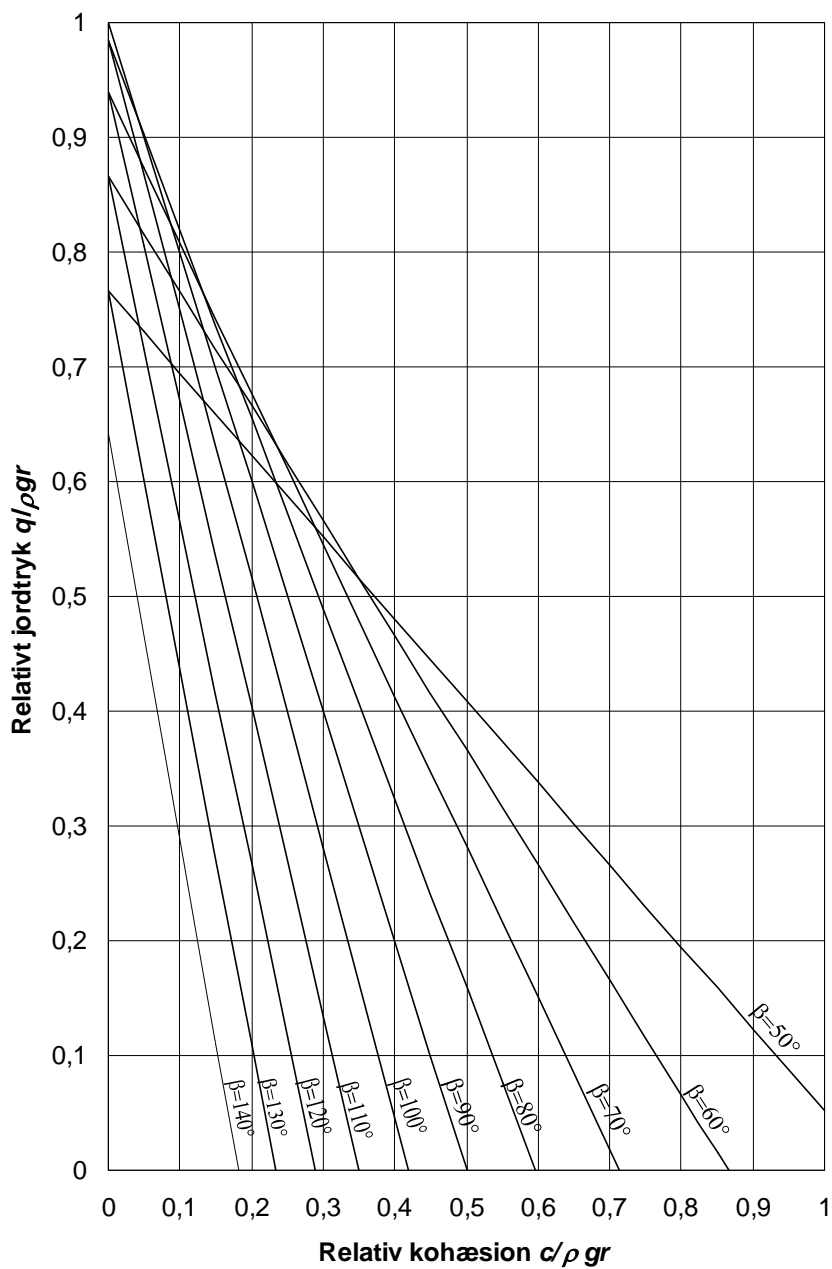
$$q_p = \int_0^r \rho g \sin \beta dr - 2c(1 - \cos \beta) \quad (15.13)$$

hvilket giver:

$$q = \rho g r \sin \beta - 2c(1 - \cos \beta) \quad (15.14)$$

På figur 15.4 er det relative jordtryk  $q/\rho g r$  vist som funktion af den relative kohæsion  $c/\rho g r$ . Kurverne er tegnet for forskellige værdier af vinklen  $\beta$ .

Bemærk at løsningen (15.14) reproducerer den eksakte løsning i afsnit 11.2.1 for  $\beta=90^\circ$ .



Figur 15.4: Det relative jordtryk  $q/\rho_{gr}$  på glat støttemur for kohæsionsjord som funktion af den relative kohæsion  $c/\rho_{gr}$  ved anvendelse af én diskontinuitetslinie

### 15.2.1 Anvendelse af flere diskontinuitetslinier

Kohæsionen medregnes i en strimmel ved jordoverfladen, hvilket iflg. (9.16) giver bidraget:

$$q = c(2 + \theta) \quad (15.15)$$

idet vinklerne  $\delta_1^*$  og  $\delta_2^*$  begge er sat til nul. Ved anvendelse af flere diskontinuitetslinier beregnes trykket fra en strimmel med tykkelsen  $dt$  af (9.16) hvor kohæsionen  $c$  er sat til nul. Belastningen  $p$  er givet ved tyngden af jorden i strimlen  $dt$  dvs.  $\rho g dt$ . Vi finder:

$$q_{dt} = \rho g dt \quad (15.16)$$

Tykkelsen  $dt$  kan som før udtrykkes ved  $\sin \beta dr$ .

Formlen er gyldig, såfremt  $\theta$  er positiv.  $\theta$  bestemmes ved (9.17), idet vinklerne  $\delta_1^*$  og  $\delta_2^*$  igen er sat til nul.:

$$\theta = 2\beta - \pi \quad (15.17)$$

Det endelige jordtryk fås ved integration af (15.16) hvortil adderes bidraget (15.15):

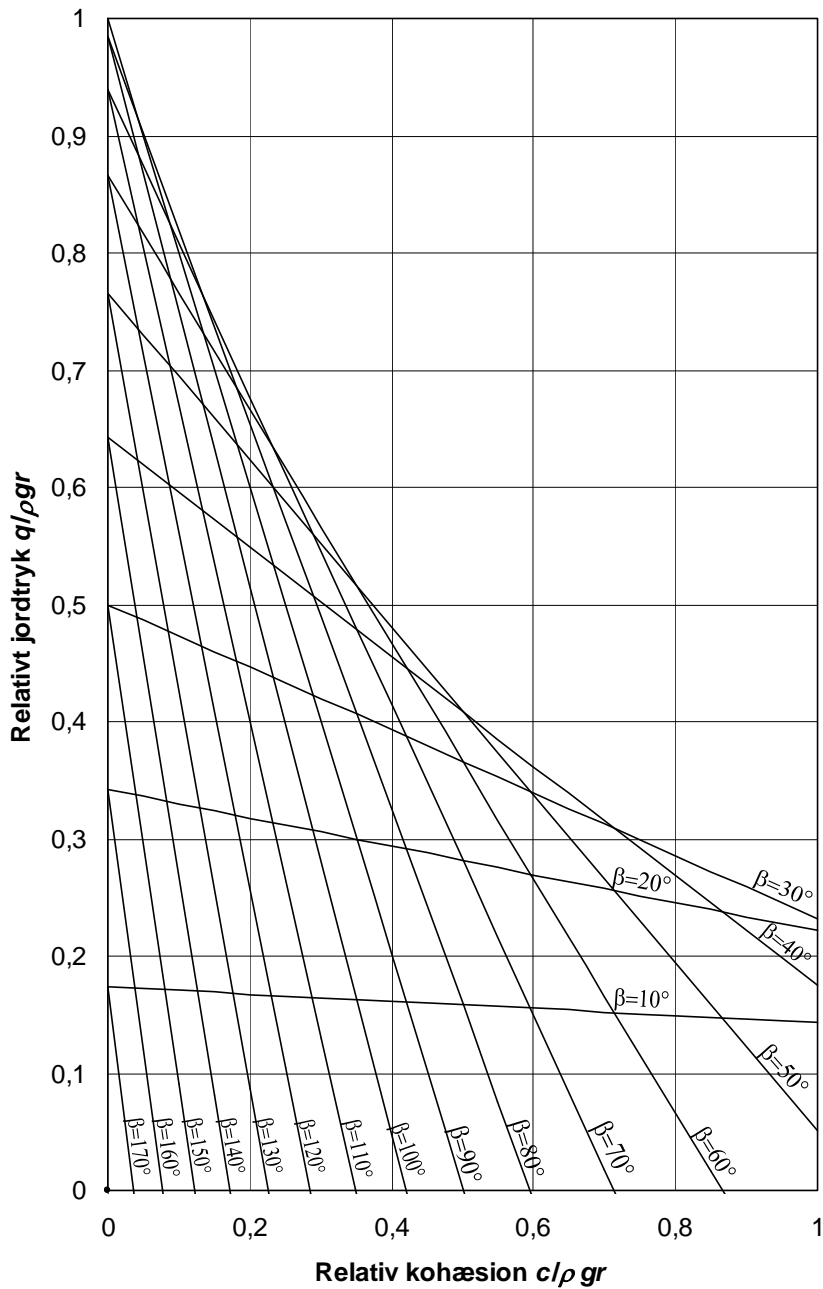
$$q_p = \int_0^r \rho g \sin \beta dr - c(2 + \theta) \quad (15.18)$$

Jordtrykket bliver:

$$q_p = \rho g r \sin \beta - c(2 + \theta) \quad (15.19)$$

I figur 15.5 er det relative jordtryk  $q/\rho g r$  vist som funktion af den relative kohæsion  $c/\rho g r$ , idet uendelig mange diskontinuitetslinier er benyttet så længe (15.17) er større end nul, og (15.14) er benyttet såfremt dette ikke er tilfældet.

Bemærk at løsningen (15.19) reproducerer den eksakte løsning i afsnit 11.2.1 for  $\beta=90^\circ$ .



Figur 15.5: Det relative jordtryk  $q/\rho_{gr}$  på glat støttemur for kohæsionsjord som funktion af den relative kohæsion  $c/\rho_{gr}$  ved anvendelse af én eller flere diskontinuitetslinier

## 15.3 Friktions- og kohæsionsjord

Der ses igen på en strimmel beliggende ved jordoverfladen. Her er det eneste bidrag til jordtrykket kohæsionen  $c$ . Bidraget findes af formel (6.21), idet (6.20) ikke giver noget bidrag, når overfladelasten sættes til nul:

$$q = c \cot \varphi \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} - c \cot \varphi \quad (15.20)$$

hvor  $\alpha$  bestemmes af (6.18), dvs.:

$$\alpha = \frac{1}{2} [\text{Arc sin}(\sin \varphi \sin \beta) + \beta] \quad (15.21)$$

Ved bestemmelse af jordtrykket fra egenvægten skal kohæsionen  $c$  sættes lig med nul. Her benyttes formel (6.20), hvorved belastningen fra hver strimmel  $dt$  bliver:

$$q_{dt} = \rho g \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} dt \quad (15.22)$$

Det resulterende jordtryk fås ved integration af (15.22) fra 0 til  $r$ , hvortil adderes bidraget fra (15.20):

$$q = \int_0^r \rho g \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} \sin \beta dr + c \cot \varphi \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} - c \cot \varphi$$

dvs.

$$q = \rho g r \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} \sin \beta + c \cot \varphi \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} - c \cot \varphi \quad (15.23)$$

Dette jordtryk kan opdeles i to bidrag, et for egenvægten og et fra kohæsionen:

$$q_p = \rho g r \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} \sin \beta \quad (15.24)$$

$$q_c = c \cot \varphi \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} - c \cot \varphi \quad (15.25)$$

Formel (15.24) ses at være identisk med (15.6) og jordtrykket kan derfor aflæses i figur 15.2. Formel (15.25) er identisk med (6.21) og jordtrykket kan derfor aflæses i figur 6.7.

### 15.3.1 Anvendelse af flere diskontinuitetslinier

Bidraget fra kohæsionen  $c$  medregnes i en strimmel ved overfladen. Dette bidrag kan bestemmes vha. (9.27), hvor  $\delta_1$  og  $\delta_2$  begge er sat lig nul:

$$q_c = c \cot \varphi \left( \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} - 1 \right) \quad (15.26)$$

Idet (9.26) benyttes kan jordtrykket fra en strimmel med tykkelsen  $dt$  findes.

Kohæsionen  $c$  skal sættes lig nul. Endvidere skal begge vinkler  $\delta_1$  og  $\delta_2$  sættes lig med nul. Derved fås:

$$q_{dt} = \rho g \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} dt \quad (15.27)$$

Jordtrykket findes ved integration fra 0 til  $r$ :

$$q = \int_0^r \rho g \sin \beta \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} dr + c \cot \varphi \left( \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} - 1 \right) \quad (15.28)$$

Formlen er kun gyldig for positive værdier af  $\theta$ , der bestemmes ved (9.28) med

$$\delta_1 = \delta_2 = 0:$$

$$\theta = 2\beta - \pi \quad (15.29)$$

Løsningen til (15.28) er givet ved:

$$q = \rho g r \sin \beta \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} + c \cot \varphi \left( \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} - 1 \right) \quad (15.30)$$

Denne løsning benyttes såfremt (15.29) er positiv og ellers er jordtrykket summen af (15.24) og (15.25). Første led i (15.30) ses at være identisk med (15.9) og jordtrykket kan derfor aflæses af figur 15.3. Andet led i (15.30) ses at være identisk med (9.27) og jordtrykket kan aflæses i figur 9.14.

Bemærk at løsningen (15.30) reproducerer den eksakte løsning i afsnit 11.2.1 for  $\beta = 90^\circ$ .





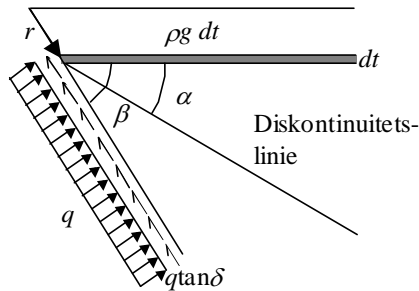
## 16 Ru støttemur med vandret jordoverflade

Ruheden for en støttemur er som i afsnit 7, defineret ved vægfriktionsvinklen  $\delta$  og adhæsionen  $a$ . Forskydningsstyrken i skillefladen mellem jord og væg er givet ved Coulomb's brudbetingelse, dvs.:

$$\tau = \pm(-\sigma \tan \delta + a) \quad (16.1)$$

Som i afsnit 7 forudsættes det at (7.2) er opfyldt, dvs.:

$$\frac{\tan \delta}{\tan \varphi} = \frac{a}{c} \quad (16.2)$$



Figur 16.1: Opdeling af jorden i vandrette lag af tykkelsen  $dt$

Diskontinuitetslinien danner vinklen  $\alpha$  med den vandrette jordoverflade, og denne vinkel er konstant for alle strimlerne med tykkelsen  $dt$ . Jordtrykket er som tidligere bestemt ved en tryknormalspænding  $q$  og en forskydningsspænding  $q \tan \delta$ .

Fortegnsregningen fremgår af figur 16.1. Træknormalspændinger regnes positive.

### 16.1 Friktionsjord

Ifølge (7.16) i afsnit 7.1, kan en nedreværdiløsning for jordtrykket fra en belastning  $\rho g dt$  skrives som:

$$q_{dt} = \rho g \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} dt \quad (16.3)$$

Vinklen  $\delta^*$  er bestemt ved (7.6), dvs.:

$$\delta^* = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \right) - \delta \right] \quad (16.4)$$

Diskontinuitetsliniens vinkel  $\alpha$  med vandret findes af (7.11):

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \sin \varphi \sin(\beta + \delta^*) \right) + \beta + \delta^* \right] \quad (16.5)$$

Jordtrykket på væggen findes ved integration (16.3) fra nul til  $r$ , idet  $dt = \sin \beta dr$ :

$$q_\rho = \int_0^r \rho g \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} \sin \beta dr \quad (16.6)$$

Jordtrykket fra egenvægten bliver derved:

$$q_\rho = \rho g r \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} \sin \beta \quad (16.7)$$

Denne løsning kræver at  $\alpha < \beta$ . Hvis dette ikke er opfyldt, er ruheden ved væggen ikke udnyttet. I dette tilfælde kan jordtrykket fra egenvægten i en strimmel med tykkelsen  $dt$  bestemmes ved hjælp af (7.18):

$$q_{dt} = \rho g \frac{1 + \sin \varphi \cos 2\beta}{1 + \sin \varphi} dt \quad (16.8)$$

Den tilsvarende forskydningsspænding er givet ved:

$$\tau_q = -\rho g \frac{\sin \varphi \sin 2\beta}{1 + \sin \varphi} dt \quad (16.9)$$

Det samlede jordtryk og den tilsvarende forskydningsspænding findes ved integration fra 0 til  $r$ , idet det igen benyttes at  $dt = \sin \beta dr$ . Herved fås følgende jordtryk på væggen:

$$q_\rho = \int_0^r \rho g \frac{1 + \sin \varphi \cos 2\beta}{1 + \sin \varphi} \sin \beta dr = \rho g r \frac{1 + \sin \varphi \cos 2\beta}{1 + \sin \varphi} \sin \beta \quad (16.10)$$

Tilsvarende bliver forskydningsspændingen ved væggen:

$$\tau_\rho = \int_0^r -\rho g \frac{\sin \varphi \sin 2\beta}{1 + \sin \varphi} \sin \beta dr = -\rho g r \frac{\sin \varphi \sin 2\beta}{1 + \sin \varphi} \sin \beta \quad (16.11)$$

### 16.1.1 Jordtryk ved ru væg, $\delta = \varphi$

I tilfælde af maksimal ruhed  $\delta = \varphi$  er  $\delta^*$  bestemt af (7.20), dvs.:

$$\delta^* = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (16.12)$$

Udtrykket for  $\alpha$  er, se (7.21):

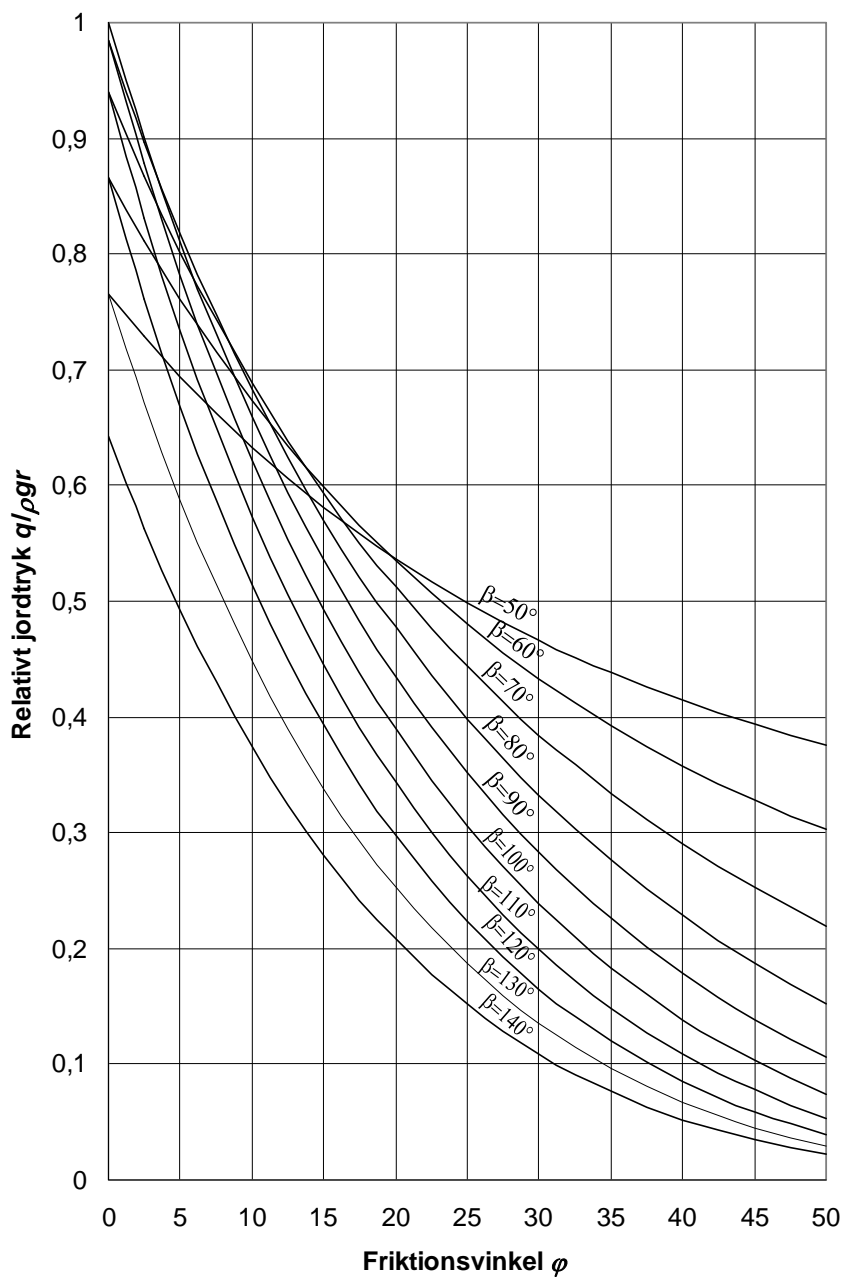
$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \sin \varphi \sin \left( \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right) + \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right] \quad (16.13)$$

Jordtrykket (16.7), kan derefter reduceres til:

$$q_p = \rho g r (1 - \sin \varphi) \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha + \varphi - 2\beta)} \sin \beta \quad (16.14)$$

Betingelsen  $\alpha < \beta$  gælder stadig. Hvis denne betingelse ikke er opfyldt, bestemmes jordtrykket ved (16.10).

I figur 16.2 er det relative jordtryk vist for vægge med fuld ruhed. Kurverne er tegnet for forskellige værdier af  $\beta$ .



Figur 16.2: Det relative jordtryk  $q/\rho g r$  på ru støttemur for friktionsjord som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$  ved anvendelse af én diskontinuitetslinie

## 16.1.2 Anvendelse af flere diskontinuitetslinier

I tilfældet uendelig mange diskontinuitetslinier bestemmes jordtrykket på væggen fra en strimmel med tykkelsen  $dt$  af (9.7):

$$q_{dt} = \rho g \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} dt \quad (16.15)$$

idet ruheden for overfladelasten er sat til  $\delta_2=0$  og ruheden ved væggen er bestemt ved  $\delta_1=\delta^*$ .

Det samlede jordtryk fås ved integration af (16.15), idet  $dt$  erstattes af  $\sin \beta dr$ :

$$q_p = \int \rho g \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} \sin \beta dr = \rho g r \sin \beta \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} \quad (16.16)$$

Formlen benyttes for positive værdier af  $\theta$ , der iflg. (9.8) er defineret ved:

$$\theta = 2\beta + 2\delta^* - \pi \quad (16.17)$$

Denne løsning benyttes i dens gyldighedsområde og hermed fås et bedre sæt af nedreværdiløsninger til bestemmelse af jordtrykket.

### 16.1.2.1 Jordtryk ved ru væg, $\delta=\varphi$

I tilfældet ru væg er:

$$\delta^* = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (16.18)$$

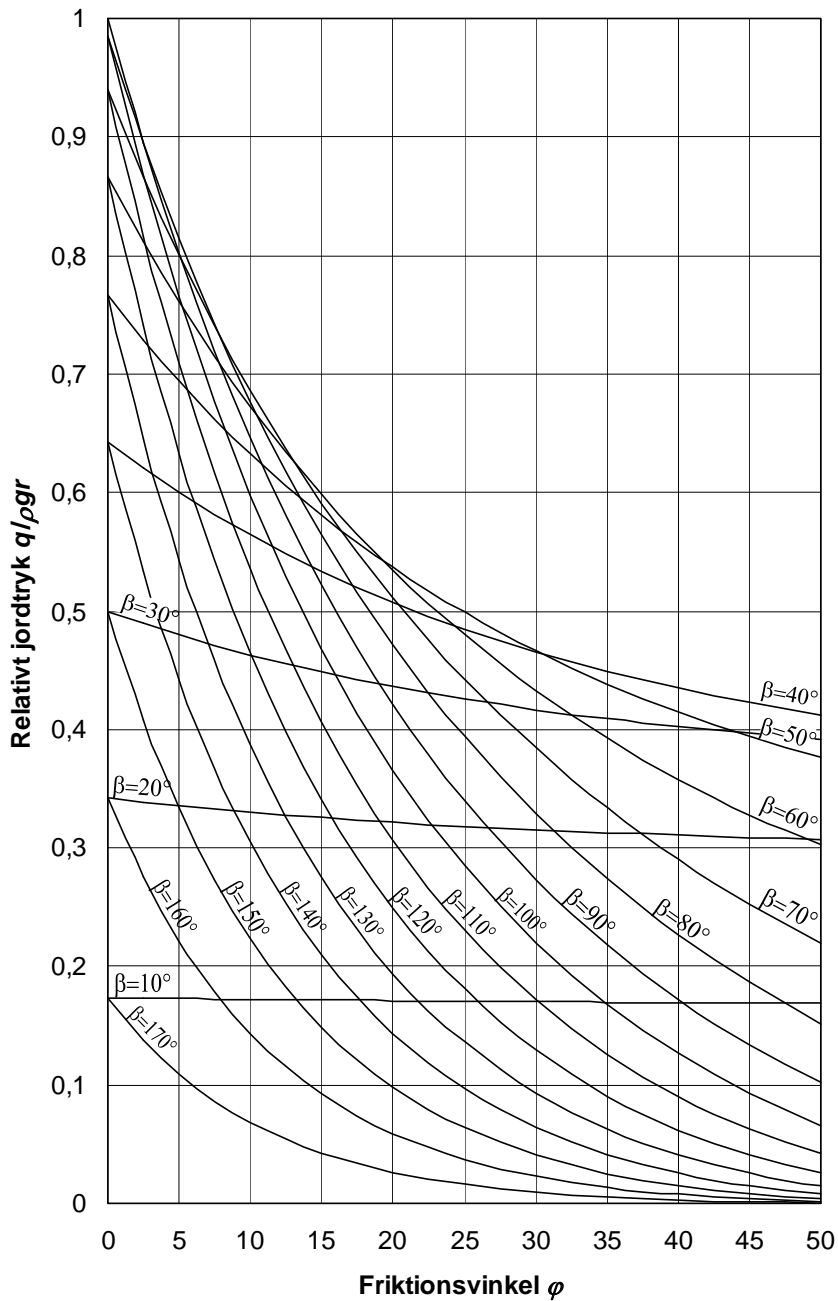
hvorved vinklen  $\theta$  bliver:

$$\theta = 2\beta - \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (16.19)$$

der fører til følgende udtryk for jordtrykket på væggen:

$$q = \rho g r \sin \beta (1 - \sin \varphi) e^{-\theta \tan \varphi} \quad (16.20)$$

I figur 16.3 er det relative jordtryk vist for vægge med fuld ruhed som funktion af friktionsvinklen. Kurverne er tegnet for forskellige værdier af  $\beta$ .



Figur 16.3: Det relative jordtryk  $q/\rho_{gr}$  på ru støttemur for friktionsjord som funktion af friktionsvinklen  $\varphi$  ved anvendelse af én eller flere diskontinuitetslinier

I tilfældet af ru væg har vi ikke nogen simpel eksakt løsning. Som tidligere nævnt har Brinch Hansen angivet en tilnærmelsesformel for dette tilfælde, [53.1]. Denne formel kan for  $\beta=90^\circ$  skrives (aktivt jordtryk):

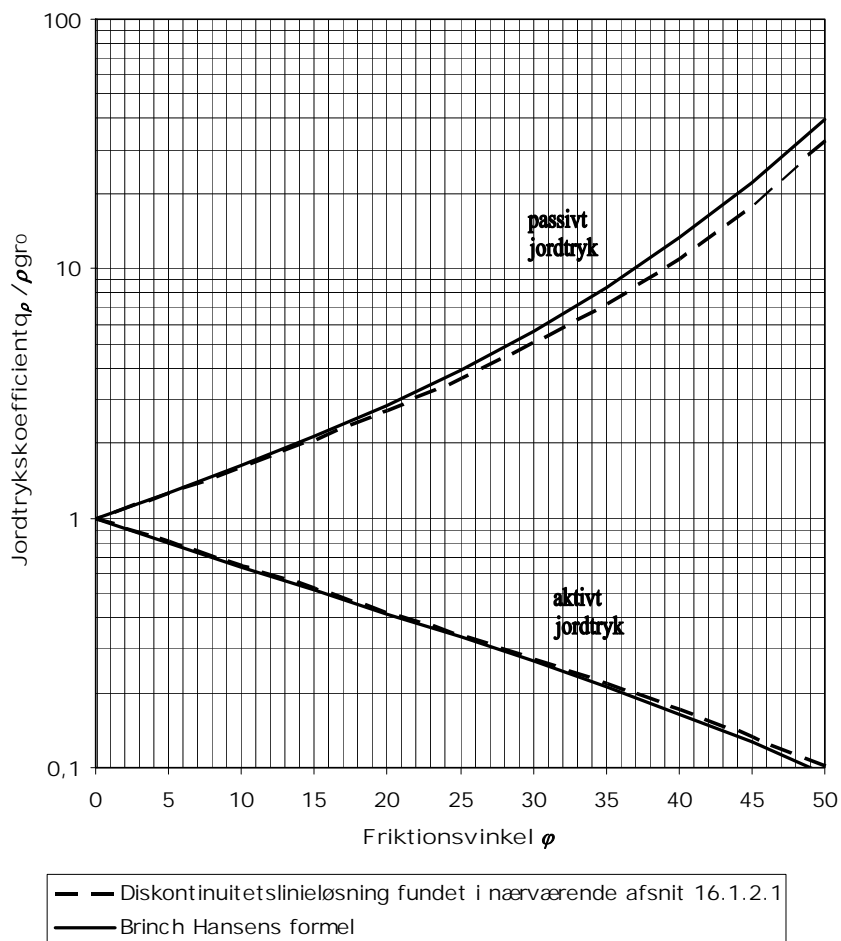
$$\frac{q}{\rho g r} = (1 - \sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi} + 0,007(e^{-9 \sin \varphi} - 1)$$

mens (16.20) lyder

$$\frac{q}{\rho g r} = (1 - \sin \varphi) e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi}$$

En sammenligning mellem de to udtryk vises i figur 16.4. Det ses som forventet at løsningen (16.20) ligger under kurven svarende til Brinch Hansens teori for aktivt jordtryk og over for passivt jordtryk, som også er vist i figuren.

Diskontinuitetslinieløsningen er en nedreværdiløsning og er derfor altid sikker at bruge.



Figur 16.4: Sammenligning mellem jordtrykskoefficient for ru væg fundet ved diskontinuitetslinieløsningen i nærværende afsnit 16.1.2.1 og Brinch Hansens løsning.



## 16.2 Kohæsionsjord

Kohæsionen medregnes i en strimmel, som er beliggende ved jordoverfladen. Af (7.32) i afsnit 7.2 fås et bidrag til jordtrykket på:

$$q = -c(1 + \cos(2\delta^*) - 2\cos(\beta + \delta^*)) \quad (16.21)$$

hvor, ifølge (7.24) og (7.28):

$$\delta^* = \frac{1}{2} \text{Arc sin} \left( \frac{a}{c} \right) \quad (16.22)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \delta^*) \quad (16.23)$$

Ved beregning af jordtrykket fra egenvægten skal kohæsionen sættes lig med nul. Belastningen fra hver strimmel er givet ved:

$$q = \rho g dt \quad (16.24)$$

Det resulterende jordtryk fås ved integration af (16.24), hvortil adderes bidraget (16.21):

$$q_r = \int_0^r \rho g \sin \beta dr - c(1 + \cos(2\delta^*) - 2\cos(\beta + \delta^*)) \quad (16.25)$$

der giver:

$$q_r = \rho g r \sin \beta - c(1 + \cos(2\delta^*) - 2\cos(\beta + \delta^*)) \quad (16.26)$$

Såfremt vinklen  $\beta$  bliver for lille, kan jordtrykket (16.26) ikke benyttes, idet diskontinuitetslinien da ligger udenfor jorden. Grænsen for gyldigheden af (16.26) er bestemt ved (7.29):

$$\delta^* < \beta \quad (16.27)$$

Hvis denne betingelse ikke er opfyldt kan bidraget fra en strimmel beliggende ved overfladen beregnes vha. (7.33):

$$q = -c(1 - \cos(2\beta)) \quad (16.28)$$

Bidraget fra en strimmel med tykkelsen  $dt$  er givet ved:

$$q_{dt} = \rho g dt \quad (16.29)$$

Det samlede jordtryk findes ved integration af (16.29) hvortil adderes bidraget fra (16.28), idet  $dt$  erstattes af  $\sin \beta dr$ :

$$q = \int_0^r \rho g \sin \beta dr - c(1 - \cos(2\beta)) = \rho g r \sin \beta - c(1 - \cos(2\beta)) \quad (16.30)$$

### 16.2.1 Jordtryk ved ru væg, $a=c$

I tilfælde af maksimal ruhed, dvs.  $a=c$ , bliver vinklen  $\delta^*$ :

$$\delta^* = \frac{\pi}{4} \quad (16.31)$$

og  $\alpha$  bliver:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (16.32)$$

Kravet til en tilladelig løsning, dvs. at (16.27) er opfyldt, kommer til at lyde:

$$\beta > \frac{\pi}{4} \quad (16.33)$$

Endelig fås jordtrykket til:

$$q = \rho g r - c \left( 1 - 2 \cos \left( \beta + \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (16.34)$$

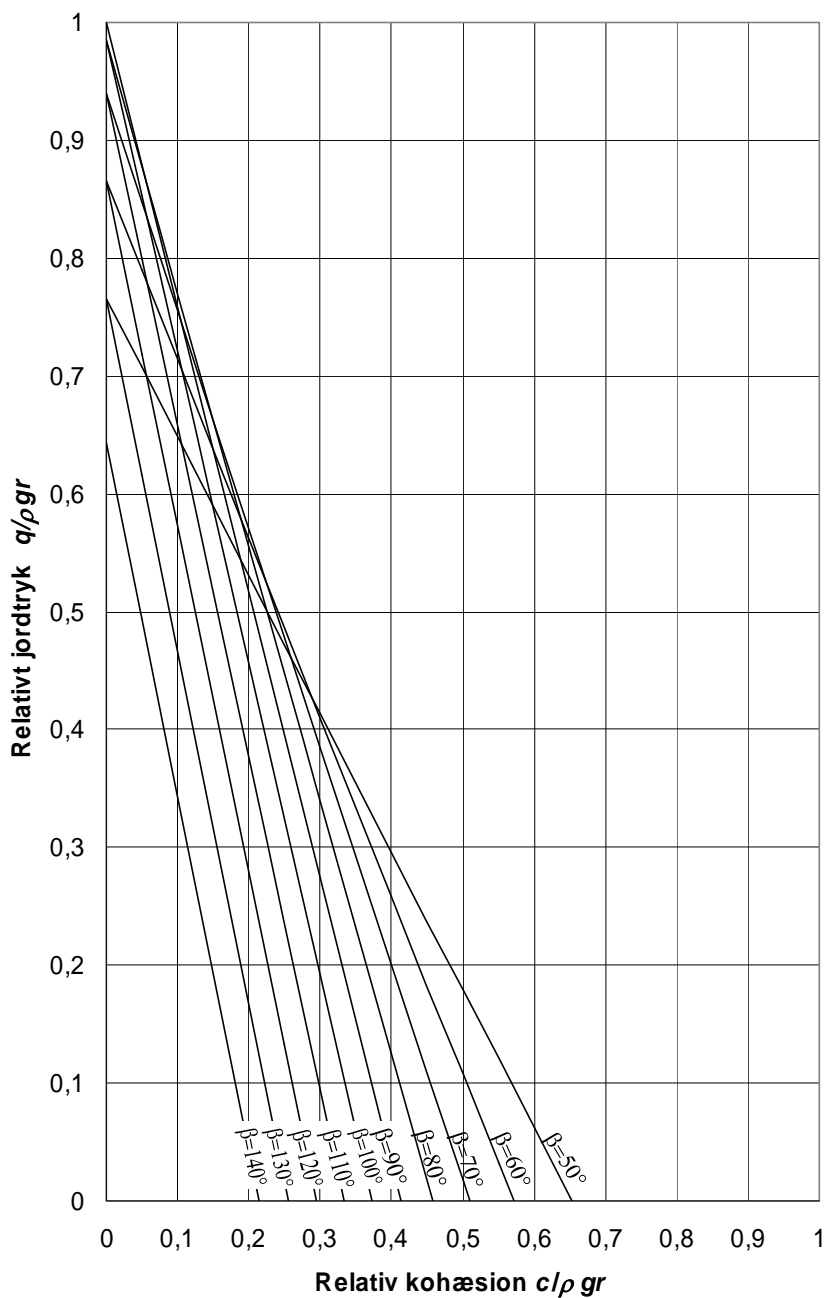
I figur 16.5 er det relative jordtryk vist for vægge med fuld ruhed som funktion af den relative kohæsion. Kurverne er tegnet for forskellige værdier af  $\beta$ .

For  $\beta=90^\circ$  giver (16.34):

$$q = \rho g r - (1 + \sqrt{2})c \cong \rho g r - 2,41c$$

mens den eksakte løsning i afsnit 11.1.2 giver

$$q = \rho g r - \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) c \cong \rho g r - 2,57c$$



Figur 16.5: Det relative jordtryk  $q/\rho g r$  på ru støttemur for kohæsionsjord som funktion af den relative kohæsion  $c/\rho g r$  ved anvendelse af én diskontinuitetslinie

## 16.2.2 Anvendelse af flere diskontinuitetslinier

Kohæsionens bidrag til jordtrykket på væggen beregnes for en strimmel ved jordoverfladen. Iflg. (9.16) fås for  $\delta_1^* = 0$  og  $\delta_2^* = \delta^*$ :

$$q = -c(1 + \theta + \cos(2\delta^*)) \quad (16.35)$$

og iht. (9.17)

$$\theta = 2\beta + 2\delta^* - \pi \quad (16.36)$$

Det kræves at  $\theta$  skal være positiv.

Jordtrykket for en strimmel af tykkelsen  $dt$  er iflg. (9.16) for  $c=0$ :

$$q_{dt} = \rho g dt \quad (16.37)$$

Udnyttes at  $dt$  er lig med  $dr \sin \beta$ , fås det endelige jordtryk som summen af (16.35) og integralet af (16.37) fra  $r=0$  til  $r$ :

$$q = \int_0^r \rho g \sin \beta dr - c(1 + 2\beta + 2\delta^* - \pi + \cos(2\delta^*)) \quad (16.38)$$

Udregnes integralet fås:

$$q = \rho g r \sin \beta - c(1 + 2\beta + 2\delta^* - \pi + \cos(2\delta^*)) \quad (16.39)$$

### 16.2.2.1 Jordtryk ved ru væg, $a=c$

For en ru væg beregnes vinklen  $\delta^*$  ved at sætte adhæsionen  $a$  lig med kohæsionen  $c$ . Herved fås ved indsættelse i (16.22):

$$\delta^* = \frac{\pi}{4} \quad (16.40)$$

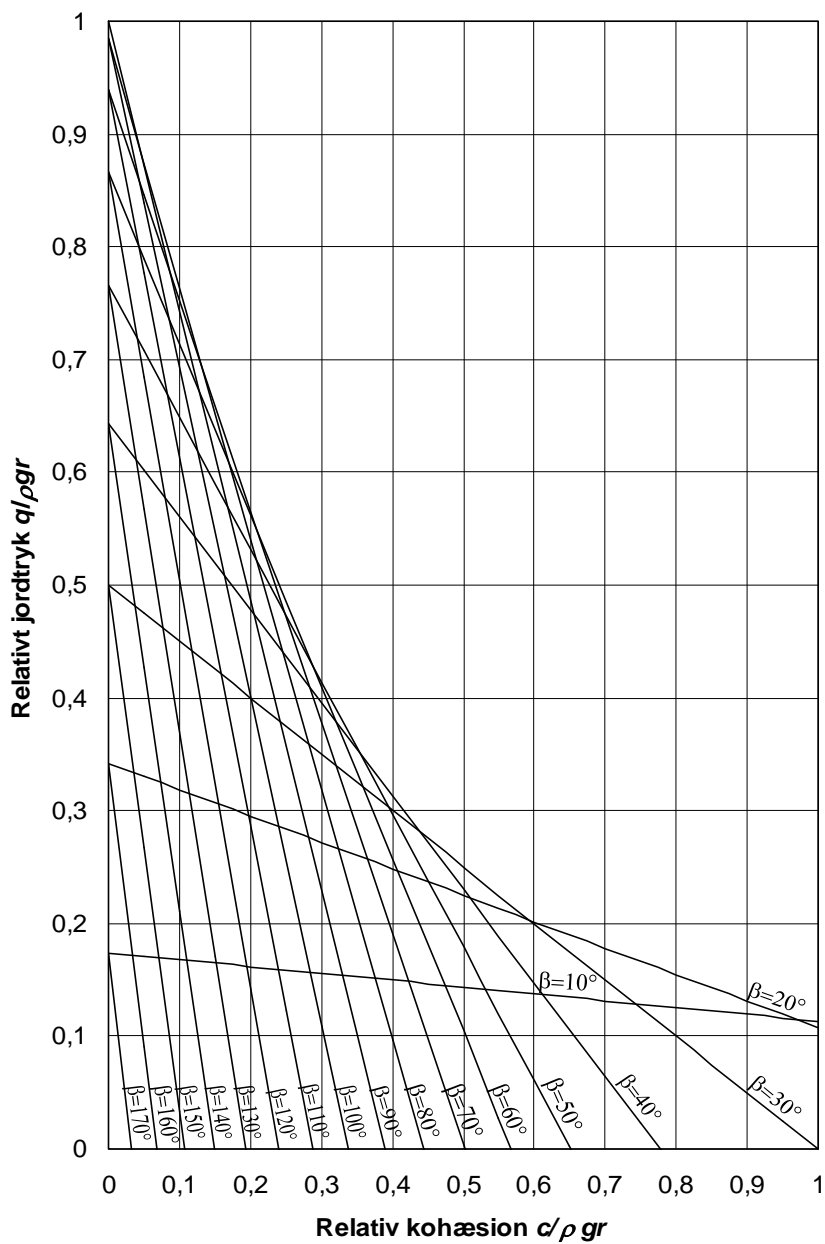
hvorved vinklen  $\theta$  iflg. (16.36) bliver:

$$\theta = 2\beta - \frac{\pi}{2} \quad (16.41)$$

Indsættes denne værdi af  $\delta^*$  i (16.39), fås følgende værdi af jordtrykket:

$$q = \rho g r \sin \beta - c \left( 1 + 2\beta - \frac{\pi}{2} \right) \quad (16.42)$$

I figur 16.6 er det relative jordtryk vist for vægge med fuld ruhed som funktion af den relative kohæsion. Kurverne er tegnet for forskellige værdier af  $\beta$ .



Figur 16.6: Det relative jordtryk  $q/\rho g r$  på ru støttemur for kohæsionsjord som funktion af den relative kohæsion  $c/\rho g r$  ved anvendelse af én eller flere diskontinuitetslinier

## 16.3 Friktions- og kohæsionsjord

Kohæsionens bidrag til jordtryk beregnes ved (7.53), idet der ses på en strimmel ved jordoverfladen:

$$q = c \cot \varphi \left( \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} - 1 \right) \quad (16.43)$$

Diskontinuitetsliniens vinkel med vandret er bestemt ved (7.46):

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin}(\sin \varphi \sin(\beta + \delta^*)) + \beta + \delta^* \right] \quad (16.44)$$

Vinklen  $\delta^*$  er en funktion af væggenes friktionsvinkel. Det forudsættes som tidligere at forholdet mellem tangens til vægfriktionsvinklen  $\delta$  og tangens til jordens friktionsvinkel  $\varphi$ , er det samme som forholdet mellem adhæsionen  $a$  og kohæsionen  $c$ , jf. formel (7.2).

Vinklen  $\delta^*$  er givet ved (7.40):

$$\delta^* = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \right) - \delta \right] \quad (16.45)$$

Ud fra formel (7.52) fås, at en strimmel med tykkelsen  $dt$  giver et jordtryk på den del af væggen, der er beliggende under strimlen svarende til:

$$q_{dt} = \rho g dt \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} \quad (16.46)$$

Det samlede jordtryk fås ved summen af (16.43) og integralet af (16.46) fra 0 til  $r$ .

Indsættes  $dt = dr \sin \beta$  fås:

$$q = \int_0^r \rho g \sin \beta \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} dr + c \cot \varphi \left( \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} - 1 \right) \quad (16.47)$$

Udregnes integralet fås jordtrykket:

$$q = \rho g r \sin \beta \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} + c \cot \varphi \left( \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha + 2\delta^*)} - 1 \right) \quad (16.48)$$

Løsningen er kun gyldig for  $\alpha < \beta$ . Er denne betingelse ikke opfyldt ligger diskontinuitetslinien uden for jorden, og løsningen kan derfor ikke bruges. Jordtrykket beregnes vha. én Rankine zone, idet det antages at ruheden ved væggen ikke er fuldt udnyttet. Dette giver iflg. (7.55) følgende bidrag fra kohæsionen:

$$q = -c \frac{2 \cos \varphi \sin^2 \beta}{1 + \sin \varphi} \quad (16.49)$$

Bidraget til jordtrykket fra en strimmel med tykkelsen  $dt$  giver iflg. (7.55):

$$q = \rho g dt \frac{1 + \sin \varphi \cos 2\beta}{1 + \sin \varphi} \quad (16.50)$$

Det samlede jordtryk findes som summen af (16.49) og integralet af (16.50) fra 0 til  $r$ :

$$q = \int_0^r \rho g \sin \beta \frac{1 + \sin \varphi \cos 2\beta}{1 + \sin \varphi} dr - c \frac{2 \cos \varphi \sin^2 \beta}{1 + \sin \varphi} \quad (16.51)$$

hvilket giver:

$$q = \rho g r \sin \beta \frac{1 + \sin \varphi \cos 2\beta}{1 + \sin \varphi} - c \frac{2 \cos \varphi \sin^2 \beta}{1 + \sin \varphi} \quad (16.52)$$

Ved tilsvarende beregninger findes forkrydningsspændingen, givet ved (7.56) til:

$$\tau_q = -\rho g r \sin \beta \frac{\sin \varphi \sin 2\beta}{1 + \sin \varphi} - c \frac{\cos \varphi \sin 2\beta}{1 + \sin \varphi} \quad (16.53)$$

### 16.3.1 Jordtryk for ru væg, $\delta = \varphi$ og $a = c$ .

Regnes væggen at have maksimal ruhed, kan vinklen  $\delta^*$  bestemmes ved (7.57):

$$\delta^* = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (16.54)$$

Indsættes denne værdi i (16.44), fås at diskontinuitetsliniens vinkel med vandret er bestemt ved:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \text{Arc sin} \left( \sin \varphi \sin \left( \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right) + \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right] \quad (16.55)$$

Jordtrykket kan reduceres til følgende, idet (16.54) er indsat:

$$q = \rho g r \sin \beta (1 - \sin \varphi) \frac{\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha + \varphi - 2\beta)} + c \cot \varphi \left( (1 - \sin \varphi) \frac{\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha + \varphi - 2\beta)} - 1 \right) \quad (16.56)$$

Det første led er bidraget fra egenvægten, der er identisk med (16.14), og kan derfor aflæses i figur 16.2. Den sidste del, som er bidraget fra kohæsionen, er identisk med (7.60) og aflæses i figur 7.15.

### 16.3.2 Anvendelse af flere diskontinuitetslinier

Anvendes uendelig mange diskontinuitetslinier, såfremt dette er tilladeligt, kan jordtryksbidraget fra kohæsionen findes vha. (9.27), med  $\delta_1=0$  og  $\delta_2=\delta^*$ :

$$q = c \cot \varphi \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} - c \cot \varphi \quad (16.57)$$

Bidraget til jordtrykket fra en strimmel med tykkelsen  $dt$ , er givet ved (9.26) ligeledes med  $\delta_1=0$  og  $\delta_2=\delta^*$ :

$$q = \rho g dt \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} \quad (16.58)$$

Det samlede jordtryk fås herefter ved summen af (16.57) og integralet af (16.58) fra 0 til  $r$ :

$$q = \int_0^r \rho g \sin \beta \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} dr + c \cot \varphi \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} - c \cot \varphi \quad (16.59)$$

Herved findes jordtrykket til:

$$q = (\rho g r \sin \beta + c \cot \varphi) \frac{1 - \cos(2\delta^*) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\theta \tan \varphi} - c \cot \varphi \quad (16.60)$$

Vinklen  $\theta$  i formlerne er givet ved (9.28), der for  $\delta_1=0$  og  $\delta_2=\delta^*$  giver:

$$\theta = 2\beta + 2\delta^* - \pi \quad (16.61)$$

Kravet for at bruge denne løsning er som tidligere, at vinklen  $\theta$  er positiv.

#### 16.3.2.1 Jordtryk for ru væg, $\delta=\varphi$ og $a=c$ .

I tilfældet fuld ruhed findes følgende værdi for  $\delta^*$ :

$$\delta^* = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (16.62)$$

Herved fås følgende udtryk for vinklen  $\theta$ :

$$\theta = 2\beta - \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (16.63)$$

der fører til følgende udtryk for jordtrykket på væggen:

$$q = (\rho g r \sin \beta + c \cot \varphi)(1 - \sin \varphi) e^{-\theta \tan \varphi} - c \cot \varphi \quad (16.64)$$



Opdeles dette udtryk i to dele, et for bidraget fra egenvægten og et for kohæsionen, fås:

$$q_p = \rho g r \sin \beta (1 - \sin \varphi) e^{-\theta \tan \varphi} \quad (16.65)$$

$$q_c = c \cot \varphi \left( (1 - \sin \varphi) e^{-\theta \tan \varphi} - 1 \right) \quad (16.66)$$

Det ses, at (16.65) er identisk med (16.20), og jordtrykket fra egenvægt kan herved aflæses i figur 16.3. Tilsvarende kan (16.66) udledes af (9.27) ved indsættelse af randbetingelserne og jordtrykket fra kohæsionen kan herefter aflæses af figur 9.15.

Vedr. sammenligning mellem disse formler, specielt (16.65) og Brinch Hansens formler henvises til afsnit 16.1.2.1. Bemærk desuden at det af de to formler (16.65) og (16.66) følger, at for  $\beta=90^\circ$  er

$$\frac{q_c}{c} = \left( \frac{q_p}{\rho g r} - 1 \right) \cot \varphi$$

Da løsningerne for egenvægt ikke er helt tilfredsstillende, er tilfældet med hældende jordoverflade ikke behandlet.

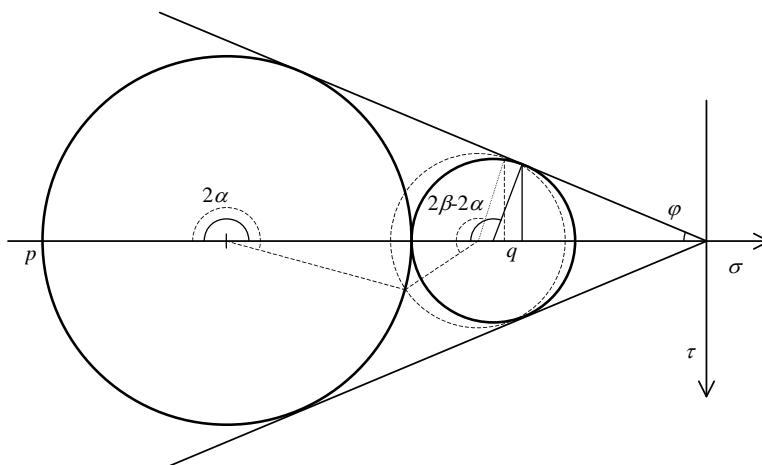


## 17 Sammenligning mellem løsninger for eksisterende teori og diskontinuitetslinieteorien

Jordtrykket på vægge beregnes her i landet vha. en teori udviklet af Brinch Hansen, [53.1] Denne teori er baseret på anvendelse af Kötters ligning, som er en differentialligning for spændingsvariationen langs en brudlinie. Denne ligning blev kombineret med randbetingelser for brudliniens vinkel med en overflade, med en væg osv.. Den såkaldte statisk korrekte vinkel er enten den samme som defineret i nærværende afhandling, eller en randbetingelse udledt på basis af et krav om identiske løsninger opnået på basis af den såkaldte ekstremmetode og anvendelse af Kötters ligning. Som en tilnærmelse benyttedes brudlinier i form af cirkler eller rette linier og kombinationer af sådanne. I specielle tilfælde findes derfor den eksakte løsning. Når der i det følgende bruges ordet "den gængse teori" menes der de løsninger, der f.eks. er samlet i Lundgren og Brinch Hansen: Geoteknik [65.2] eller den nyeste formelsamling af J. Steenfelt: [80.2].

I forhold til den gængse teori har diskontinuitetslinieteorien den fordel, at den har et større gyldighedsområde for alle mulige kombinationer af de forskellige parametre såsom hældning af jordoverflade, hældning af væg, vægfriktionsvinkel, "friktionsvinkel" af overfladelast og jordstyrkeparametrene. Når der kun benyttes én diskontinuitetslinie har denne teori dog en svaghed, når vinklen  $\beta$  mellem jordoverfladen og væg bliver for stor, hvilket naturligvis var at vente.

Jordtrykskoefficienterne kan endog begynde af stige ved forøgelse af vinklen  $\beta$  (for aktivt tryk). Stigningen skyldes, at der ved anvendelse af én diskontinuitetslinie kun kan opnås en maksimal forskel mellem f.eks. overfladelasten og jordtrykket på væggen. For en væg, der skal bære overfladelasten  $p$ , vil der være en vinkel  $\beta$ , hvor jordtrykket  $q$  har nået sit minimum. Denne løsning svarer til den fuldt optrukne løsning i figur 17.1. Antages nu at vinklen  $\beta$  forøges, fås den punkterede løsning i figur 17.1. Det ses, at når overfladelasten  $p$  er uændret, vil jordtrykskoefficienten stige. Endvidere ses, at den minimale værdi for  $q$  findes for en vinkel  $\beta = \frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ .



Figur 17.1: Minimum for jordtryk i friktionsjord iflg. diskontinuitetslinieteorien

I figur 17.2 til figur 17.7 er løsningerne for én og uendelig mange diskontinuitetslinier sammenlignet. Grænselværdien for gyldighedsintervallet ved anvendelse af uendelig mange diskontinuitetslinier er markeret med en prik. Det ses, at kurverne i disse punkter har samme værdi og hældning, hvilket indikerer en god overgang imellem teorierne. Det ses endvidere, at en enkelt diskontinuitetslinie giver dårlige resultater for store vinkler af  $\beta$ .

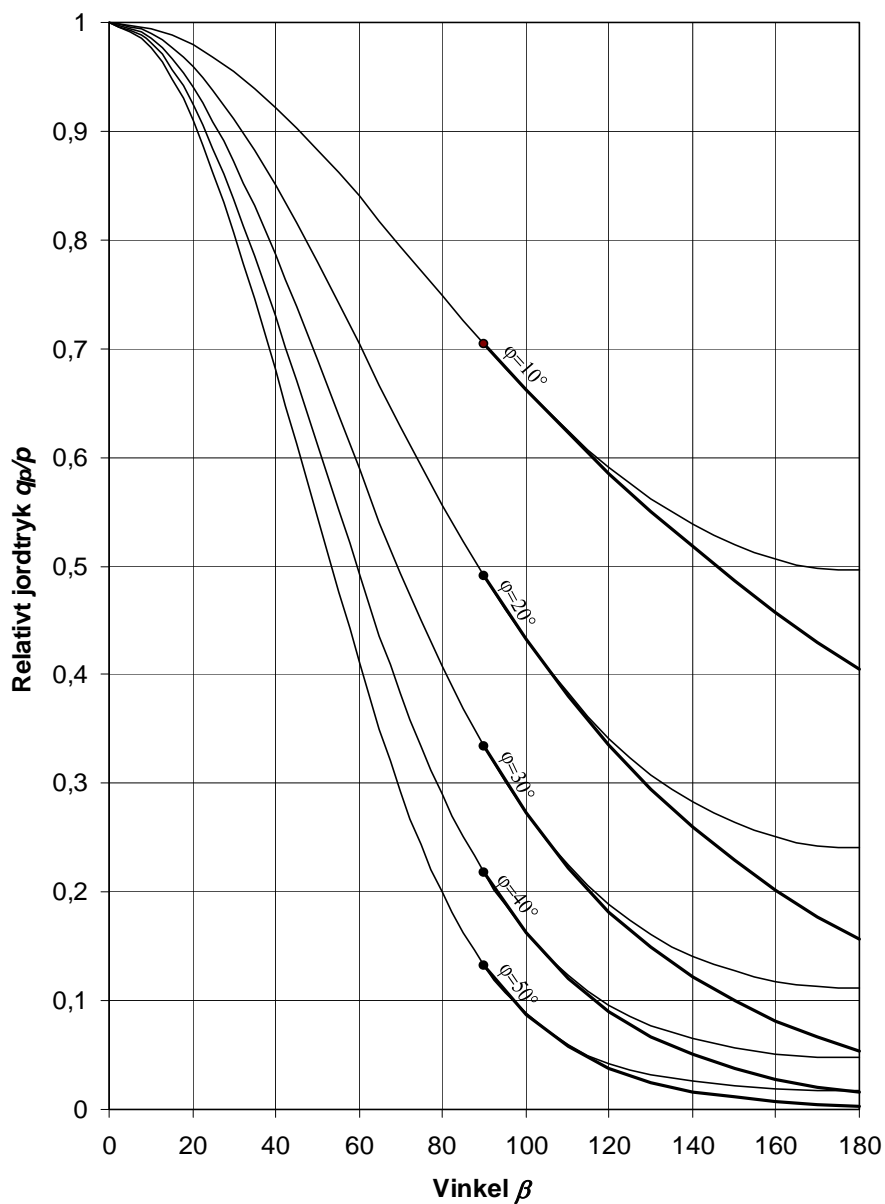
Den bedste løsning findes ved at benytte løsningen for uendelig mange diskontinuitetslinier i dennes gyldighedsinterval og kun bruge løsningen for én diskontinuitetslinie uden for dette interval.

I figur 17.8 til figur 17.13 er diskontinuitetslinieteorien ved anvendelse af én eller flere diskontinuitetslinier sammenlignet med den gængse jordtryksteori. Figureerne viser det relative jordtryk som funktion af vinklen  $\beta$ . De er tegnet for forskellige værdier af friktionsvinkel/relativ kohæsion. Kurverne viser kun bidraget fra overfladelasten  $p$ , dvs. der ikke er regnet med egenvægt.

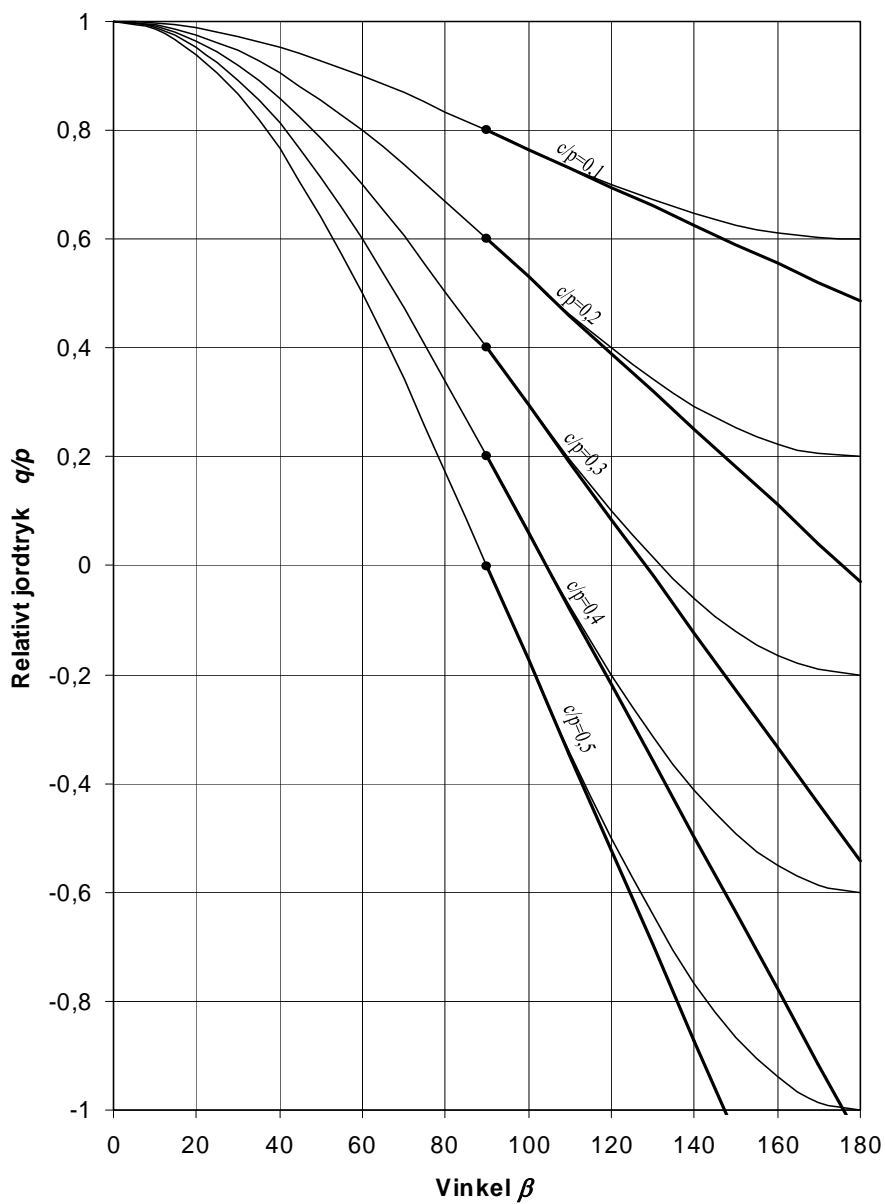
I grænsetilfældet uendelig mange diskontinuitetslinier viser det sig, at teorien stort set fuldstændigt reproducerer den gængse jordtryksteori. Den gængse jordtryksteori er dog begrænset til det interval, som falder sammen det interval, hvor der anvendes flere diskontinuitetslinier. Mens den nye teori således ikke giver noget nyt i størstedelen af det relevante  $\beta$ -interval, giver teorien nyttige nye løsninger for små værdier  $\beta$ , hvor den gængse teori ikke giver noget svar, hvilket skyldes, at de nævnte randbetingelser ikke kan opfyldes.

I figur 17.14 til 17.19 er teorien sammenlignet med den gængse jordtryksteori i tilfældet af hældende jordoverflade. Bemærkningerne er de samme som ovenfor.

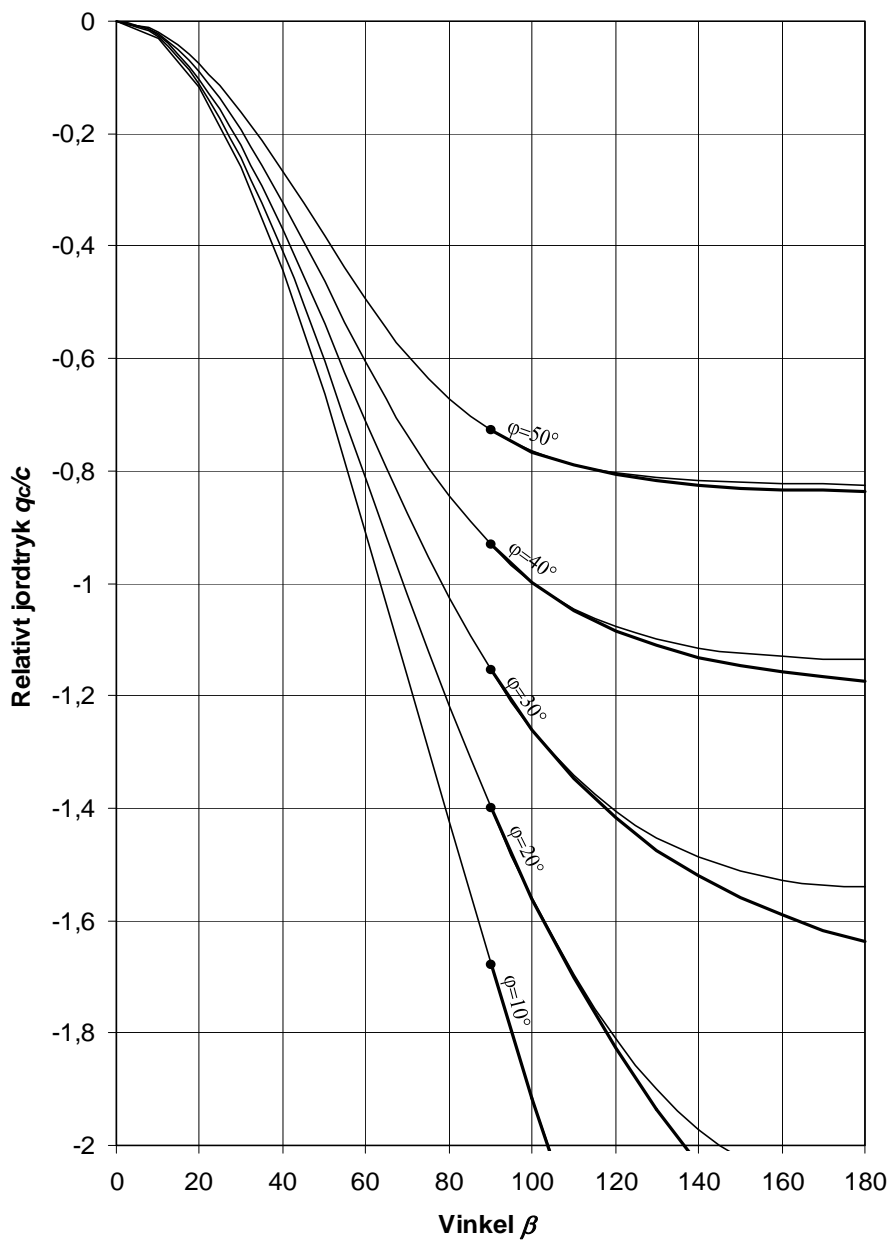
Tilfældet med egenvægt er allerede kommenteret i kapitel 15 og 16.



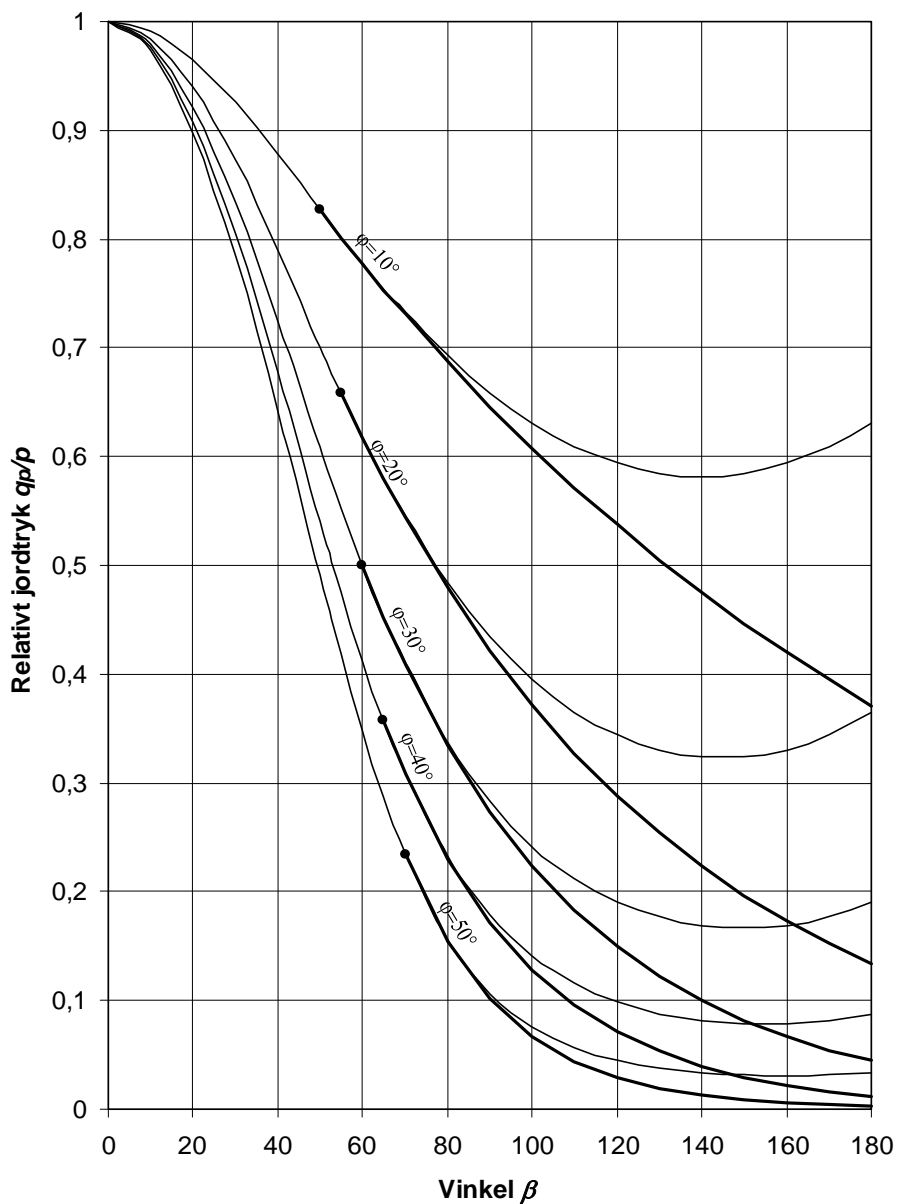
Figur 17.2: Sammenligning af det relative jordtryk  $q_p/p$  på glat støttemur for friktionsjord som funktion af vinklen  $\beta$  ved anvendelse af én (tynd streg) eller flere (tyk streg) diskontinuitetslinier



Figur 17.3: Sammenligning af det relative jordtryk  $q/p$  på glat støttemur for kohæsionsjord som funktion af vinklen  $\beta$  ved anvendelse af én (tynd streg) eller flere (tyk streg) diskontinuitetslinier

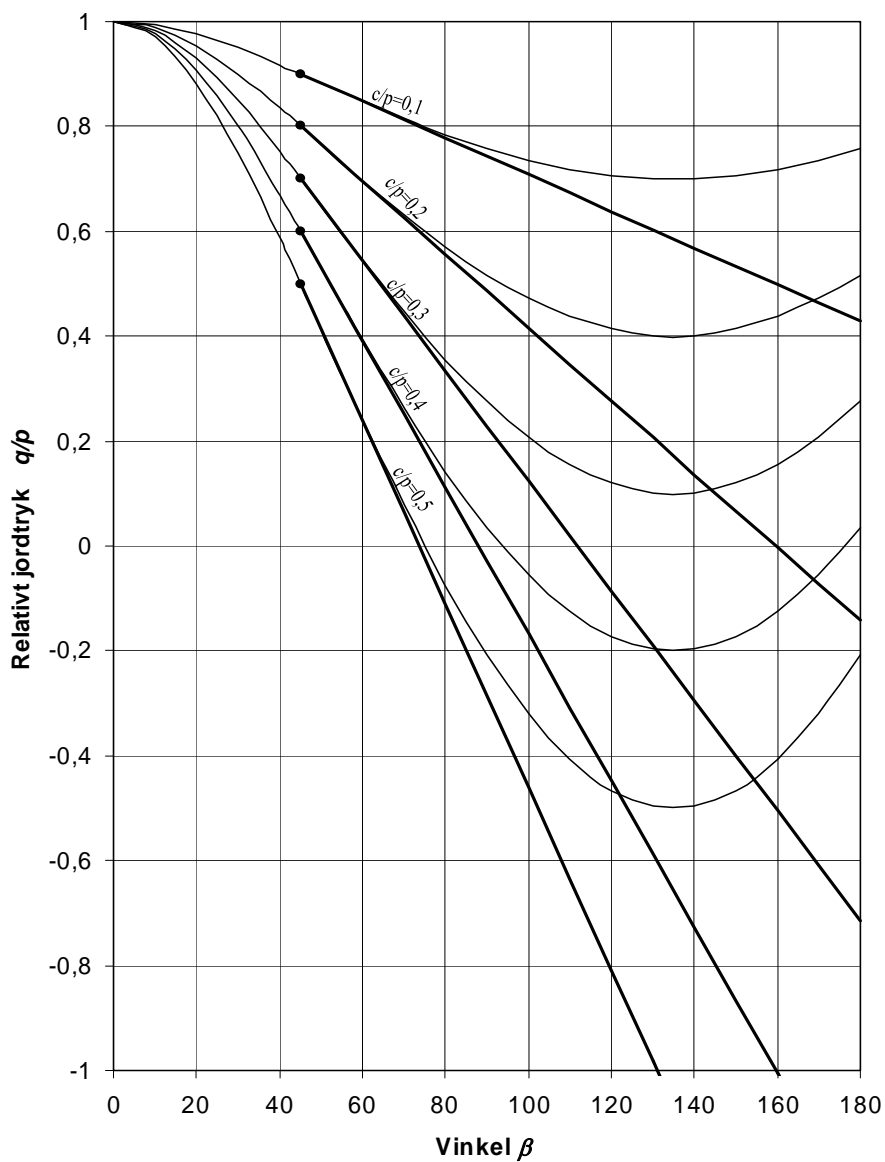


Figur 17.4: Sammenligning af det relative jordtryk  $q/c$  på glat støttemur for friktions- og kohæsionsjord som funktion af vinklen  $\beta$  ved anvendelse af én (tynd streg) eller flere (tyk streg) diskontinuitetslinier

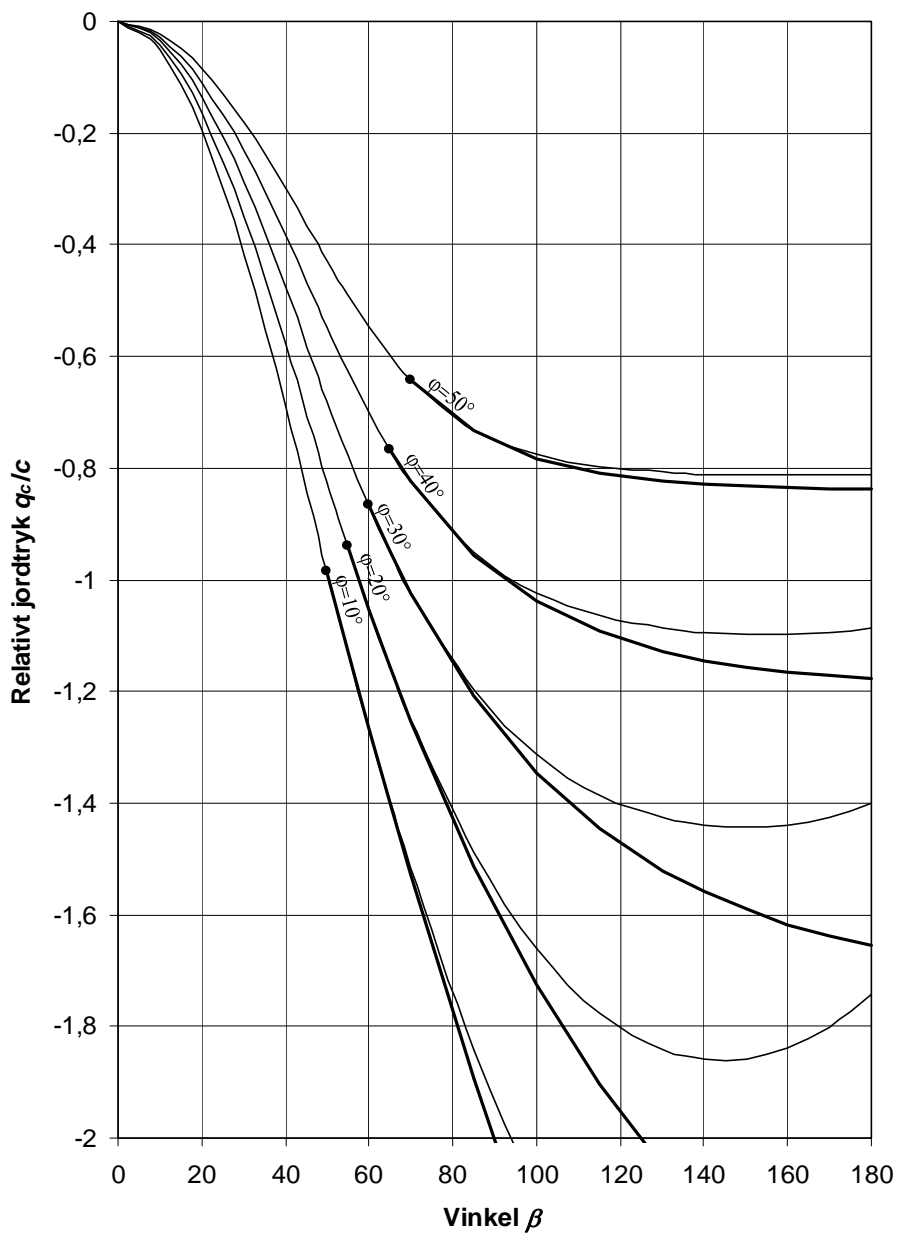


Figur 17.5: Sammenligning af det relative jordtryk  $q_p/p$  på ru støttemur for friktionsjord som funktion af vinklen  $\beta$  ved anvendelse af én (tynd streg) eller flere (tyk streg) diskontinuitetslinier

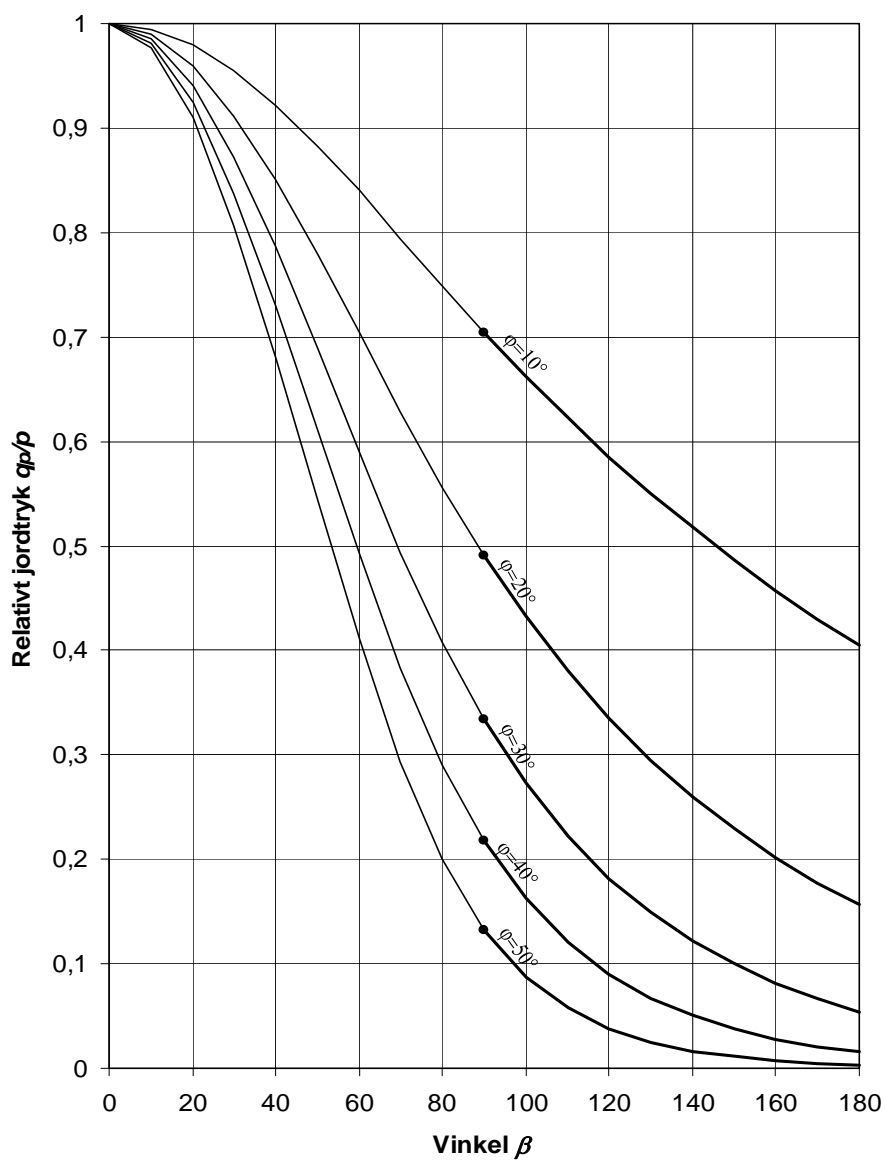




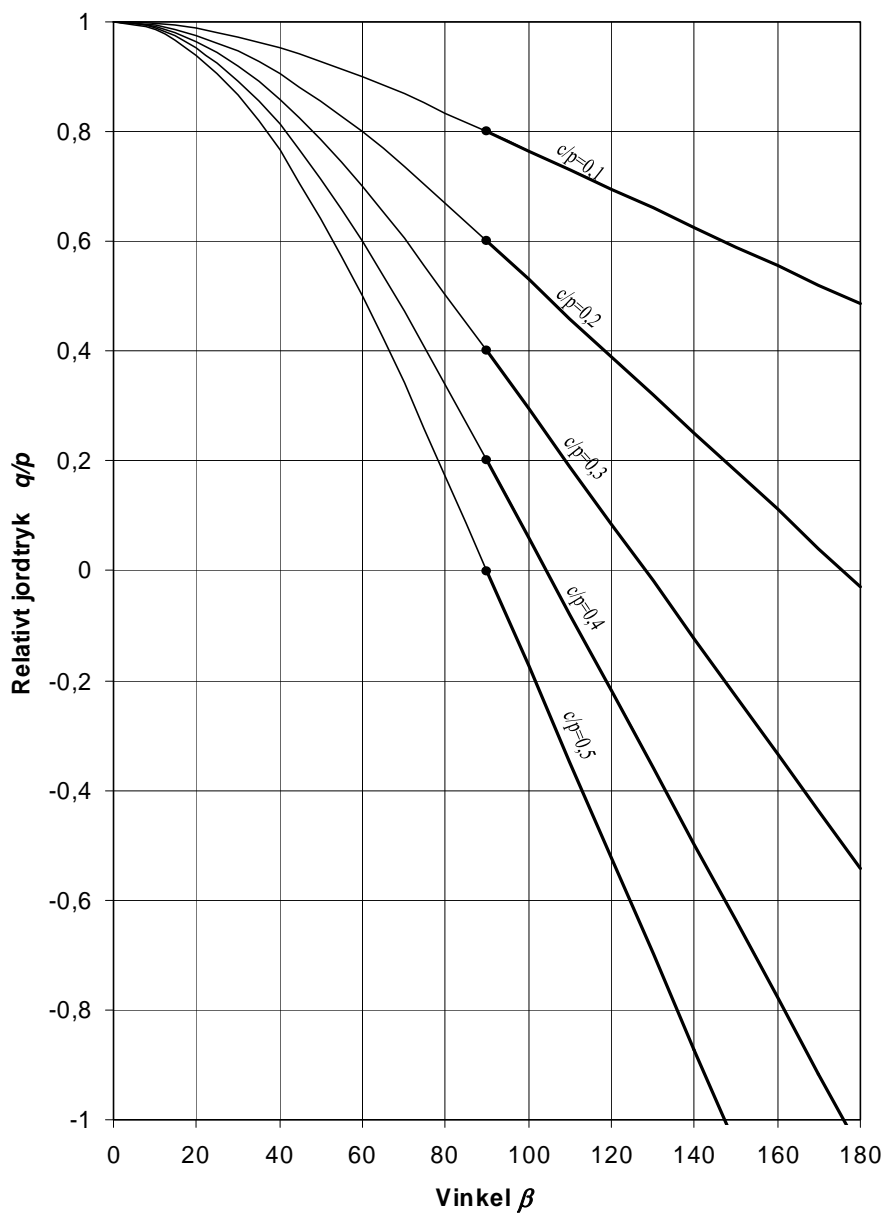
Figur 17.6: Sammenligning af det relative jordtryk  $q/p$  på ru støttemur for kohæsionsjord som funktion af vinklen  $\beta$  ved anvendelse af én (tynd streg) eller flere (tyk streg) diskontinuitetslinier



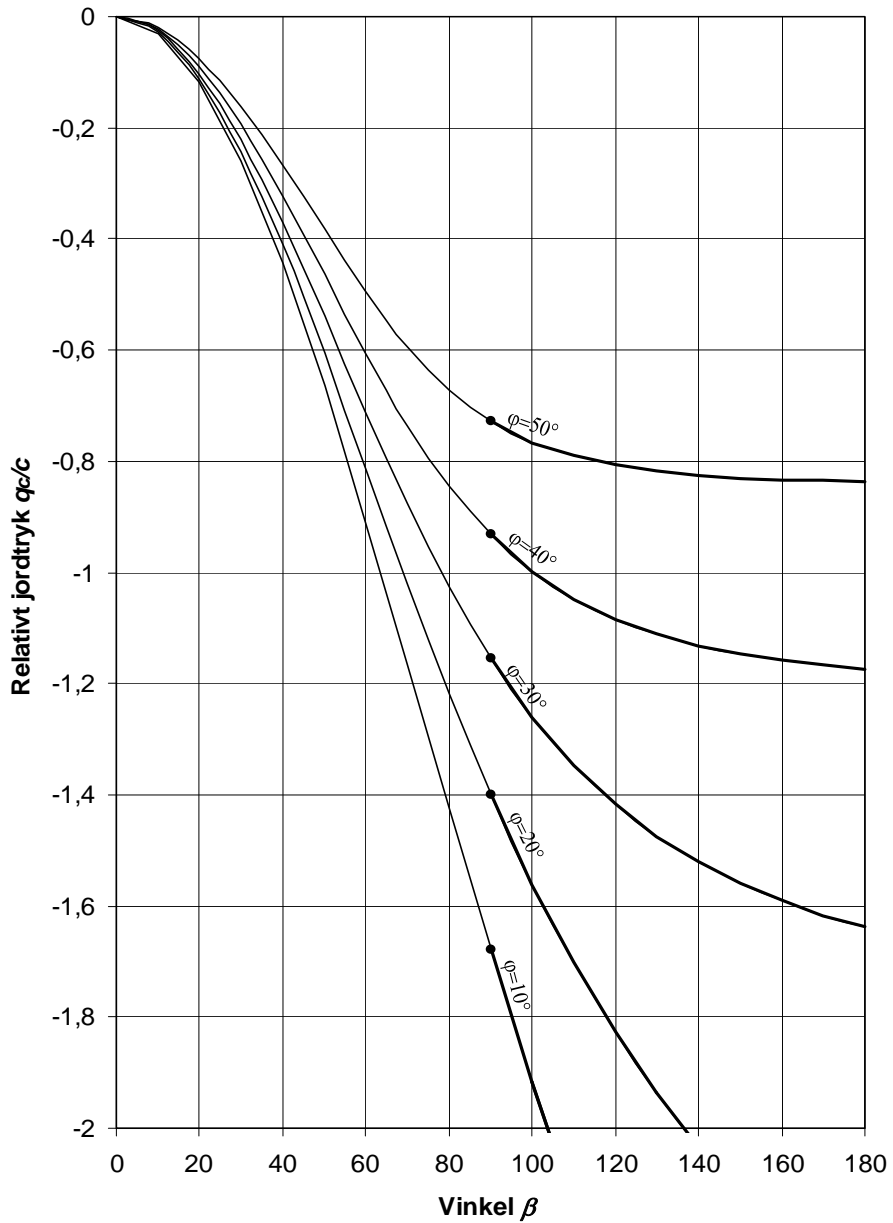
Figur 17.7: Sammenligning af det relative jordtryk  $q_c/c$  på ru støttemur for friktions- og kohæsionsjord som funktion af vinklen  $\beta$  ved anvendelse af én (tynd streg) eller flere (tyk streg) diskontinuitetslinier



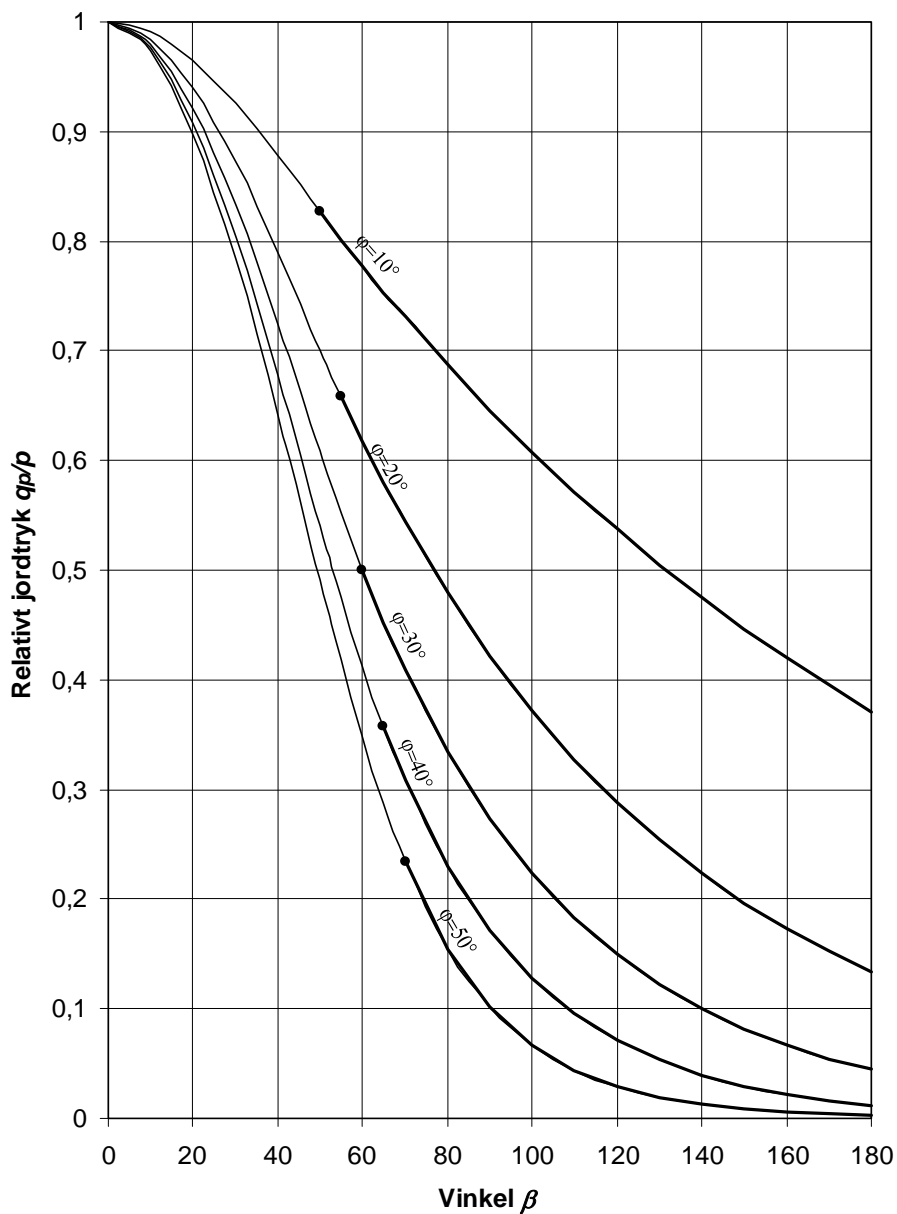
Figur 17.8: Sammenligning af det relative jordtryk  $q_p/p$  på glat støttemur for friktionsjord som funktion af vinklen  $\beta$  ved anvendelse af diskontinuitetslinieteorien (tynd streg) og Brinch Hansens teori (tyk streg)



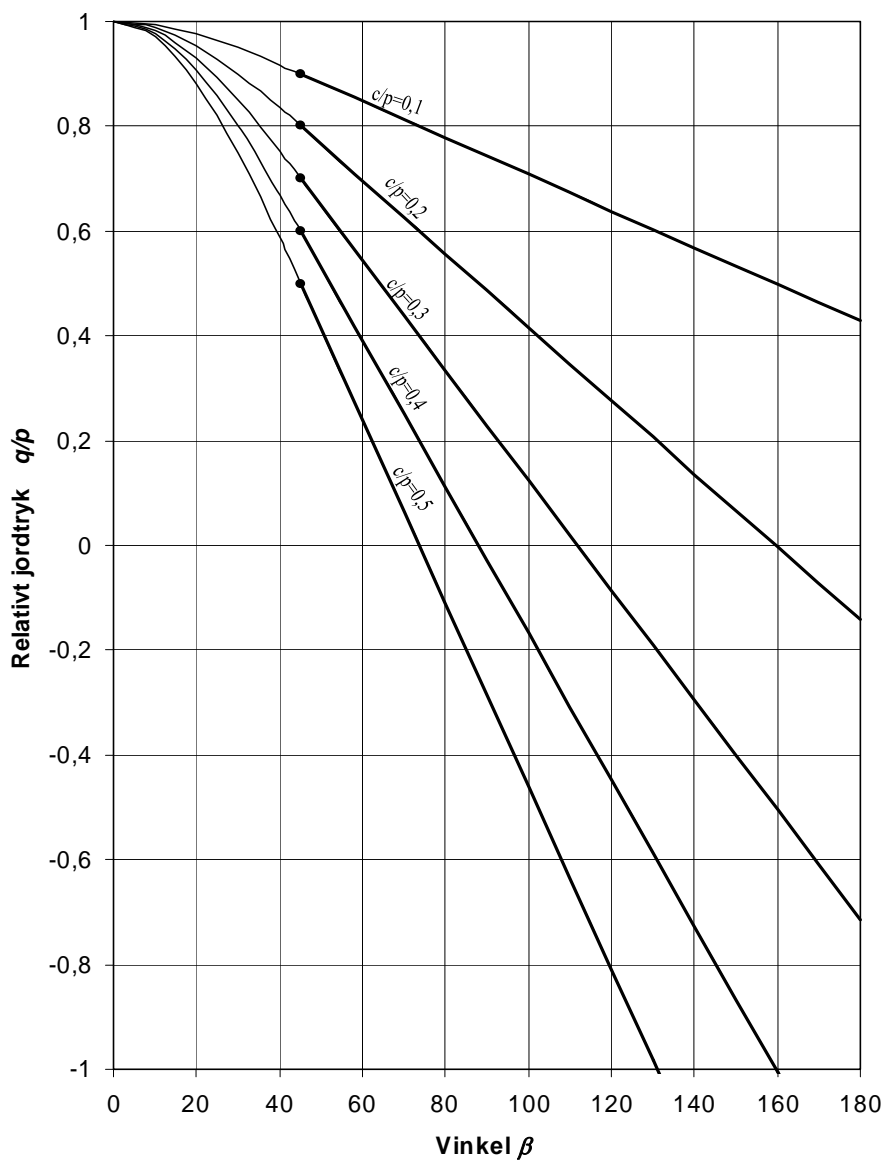
Figur 17.9: Sammenligning af det relative jordtryk  $q/p$  på glat støttemur for kohæsionsjord som funktion af vinklen  $\beta$  ved anvendelse af diskontinuitetslinieteorien (tynd streg) og Brinch Hansens teori (tyk streg)



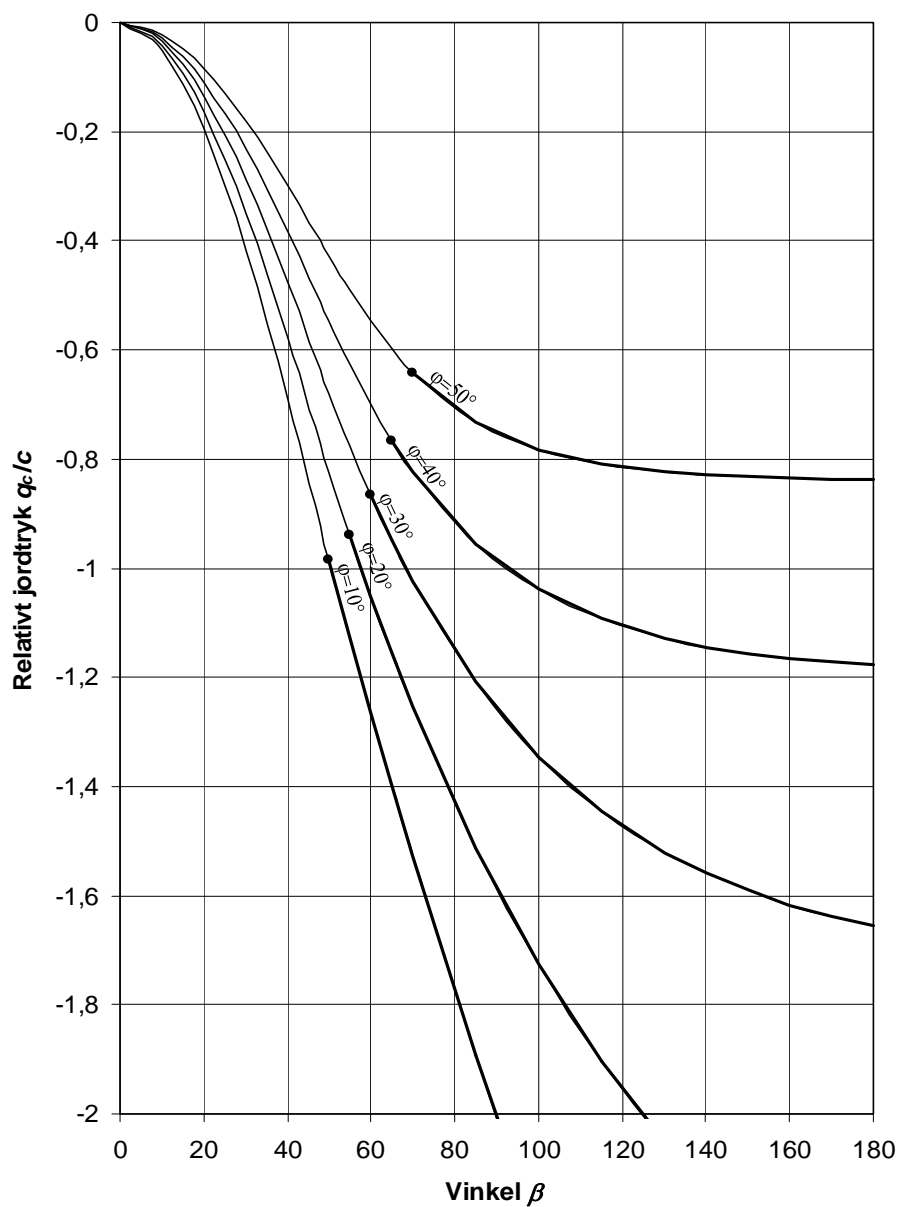
Figur 17.10: Sammenligning af det relative jordtryk  $q/c$  på glat støttemur for friktions- og kohæsionsjord som funktion af vinklen  $\beta$  ved anvendelse af diskontinuitetslinieteorien (tynd streg) og Brinch Hansens teori (tyk streg)



Figur 17.11: Sammenligning af det relative jordtryk  $q_p/p$  på ru støttemur for friktionsjord som funktion af vinklen  $\beta$  ved anvendelse af diskontinuitetslinieteorien (tynd streg) og Brinch Hansens teori (tyk streg)

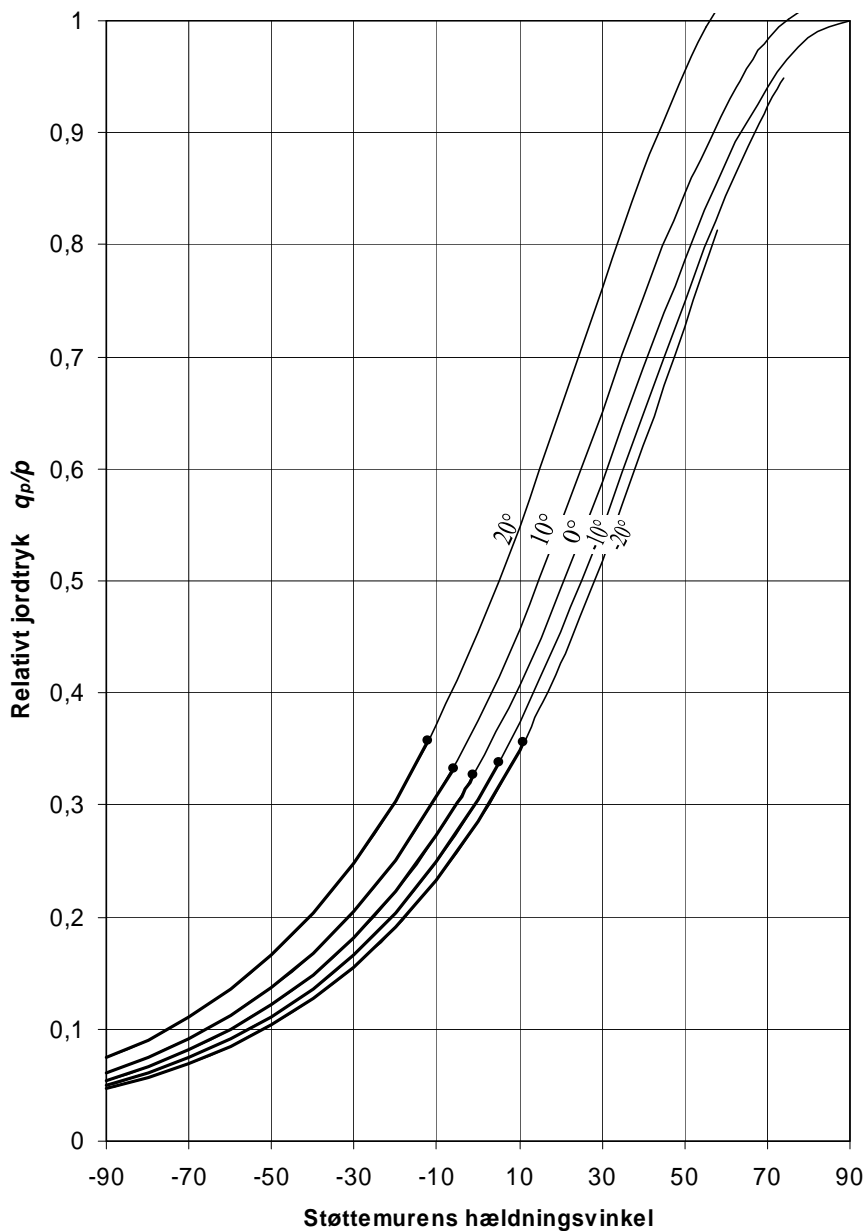


Figur 17.12: Sammenligning af det relative jordtryk  $q/p$  på ru støttemur for kohæsionsjord som funktion af vinklen  $\beta$  ved anvendelse af diskontinuitetslinieteorien (tynd streg) og Brinch Hansens teori (tyk streg)

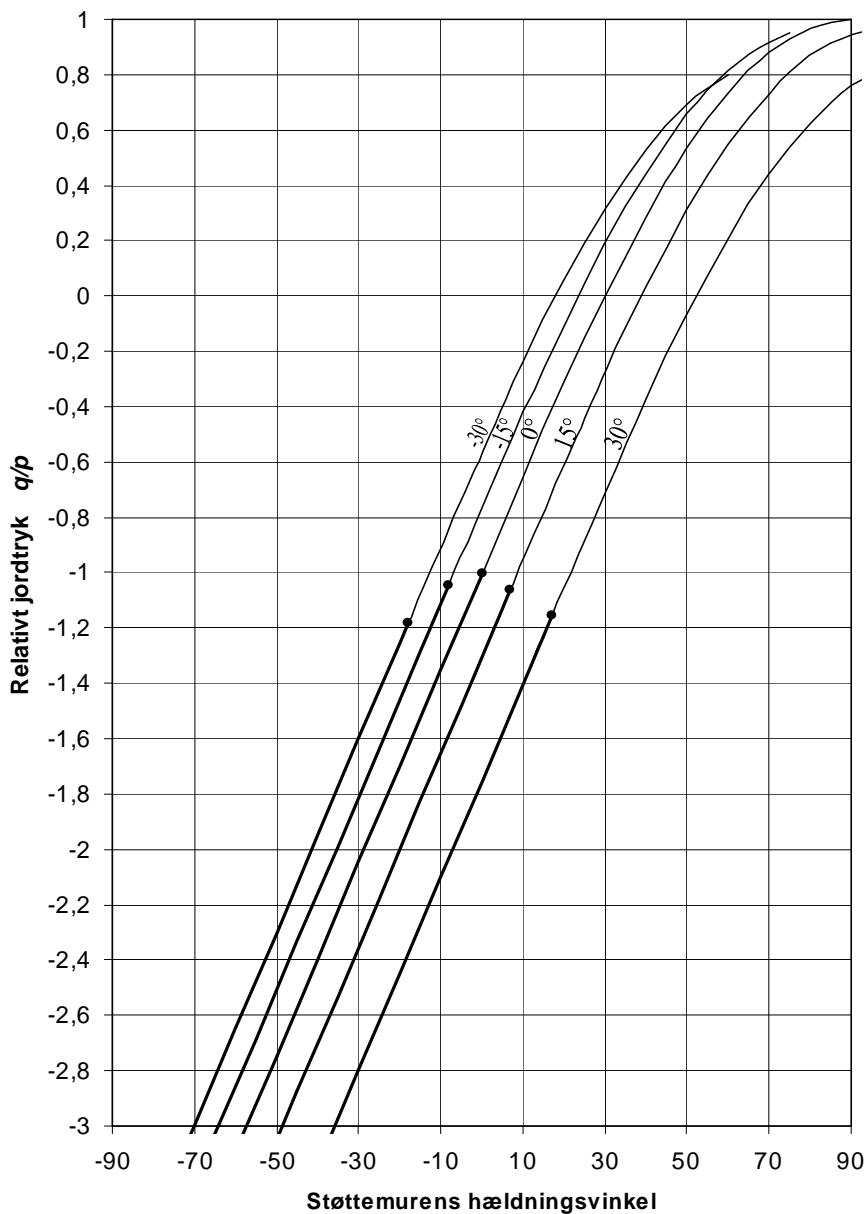


Figur 17.13: Sammenligning af det relative jordtryk  $q_e/c$  på ru støttemur for friktions- og kohæsionsjord som funktion af vinklen  $\beta$  ved anvendelse af diskontinuitetslinieteorien (tynd streg) og Brinch Hansens teori (tyk streg)

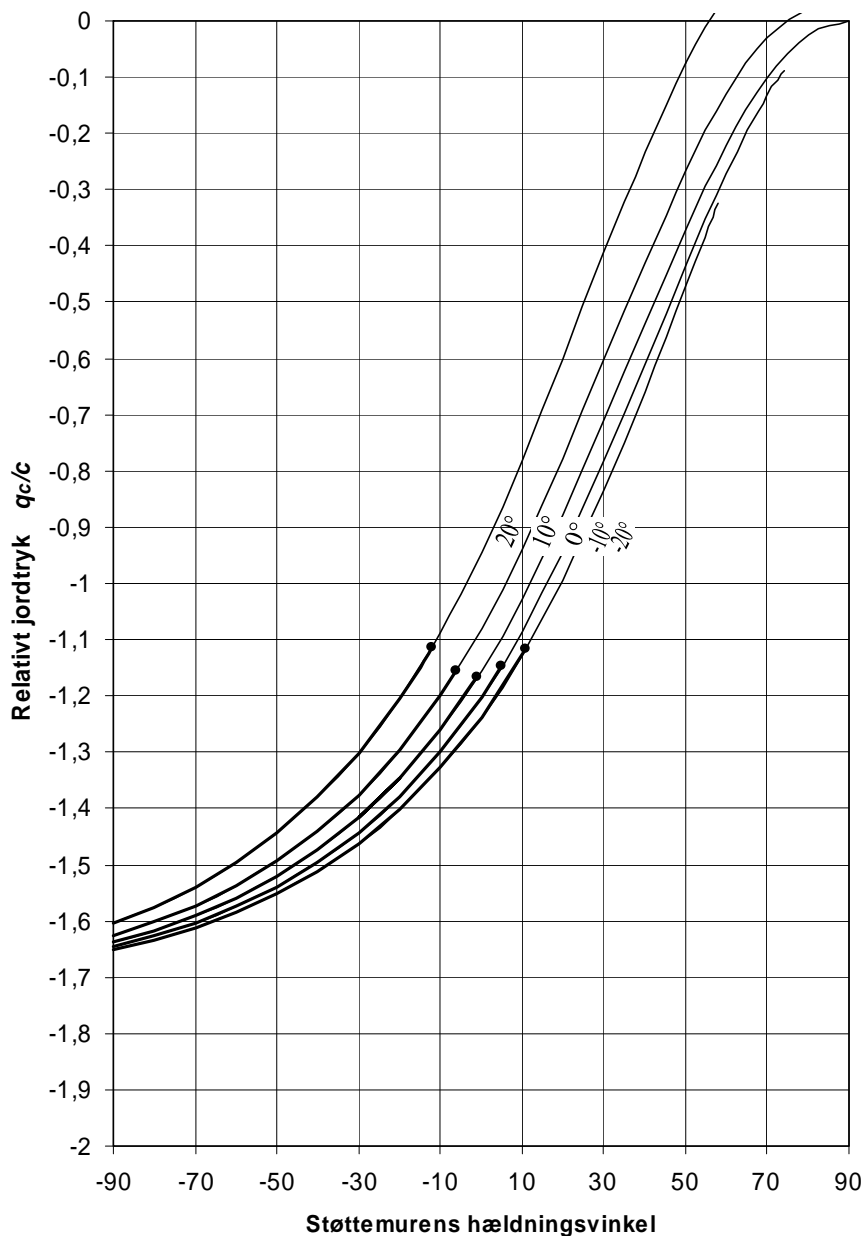




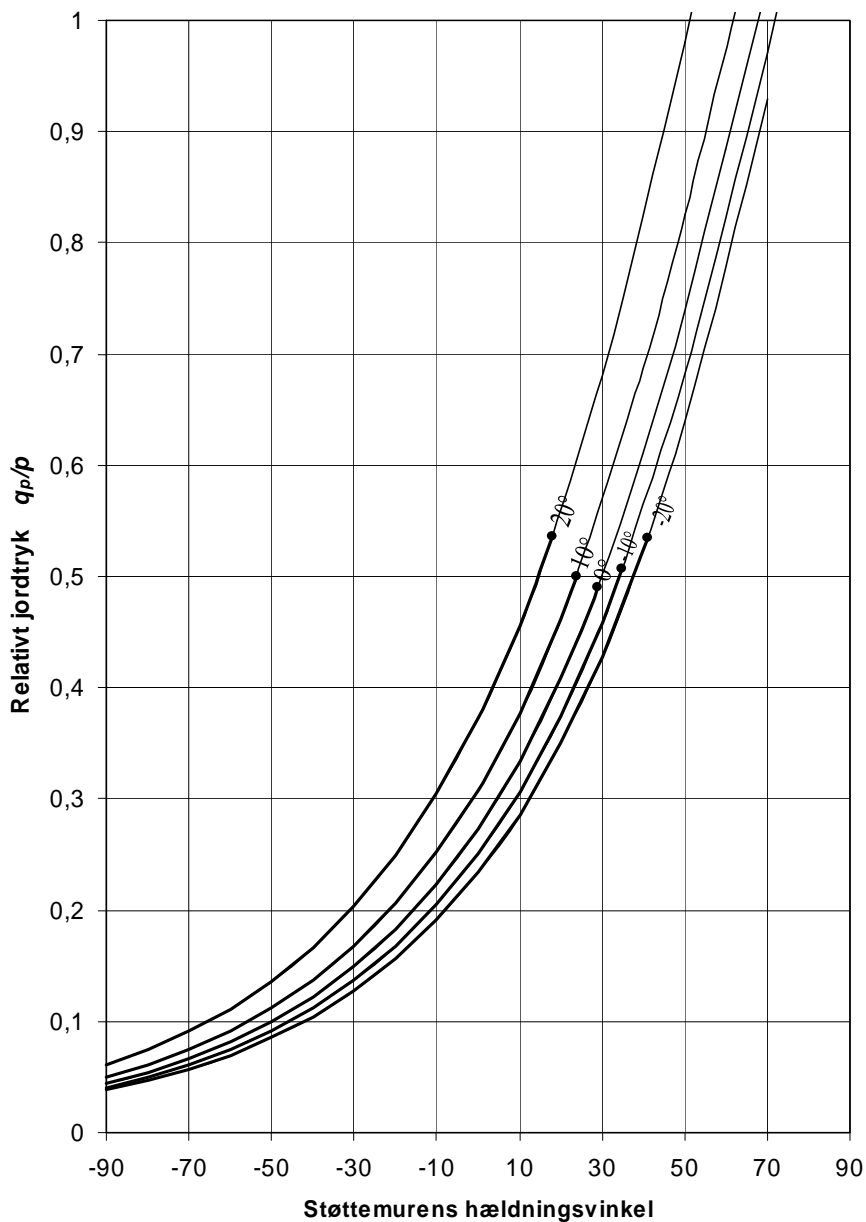
Figur 17.14: Sammenligning af det relative jordtryk  $q_p/p$  på glat støttemur for friktionsjord,  $\varphi=30^\circ$ , med variende overfladehældning, som funktion af støttemurens hældningsvinkel med lodret ved anvendelse af diskontinuitetslinieteorien (tynd streg) og Brinch Hansens teori (tyk streg)



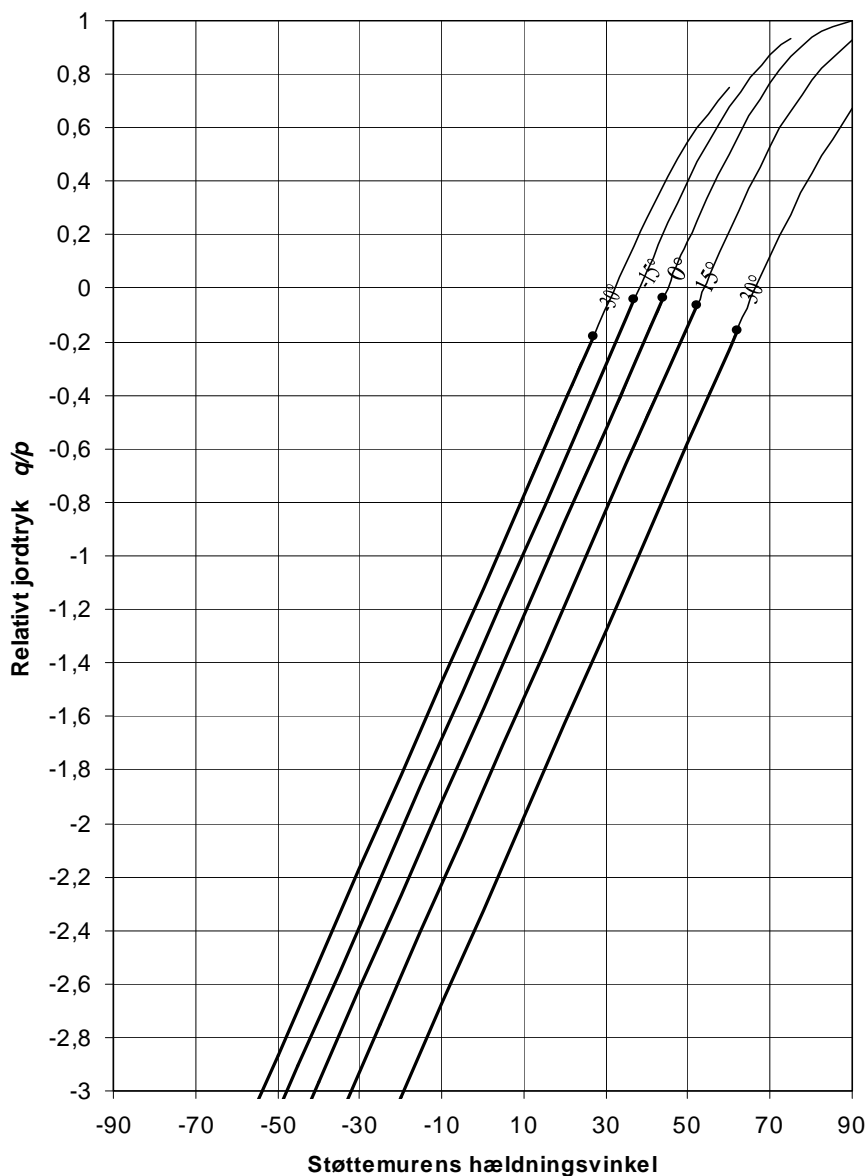
Figur 17.15: Sammenligning af det relative jordtryk  $q/p$  på glat støttemur for kohæsionsjord,  $p/c=1$ , med variende overfladehældning, som funktion af støttemurens hældningsvinkel med lodret ved anvendelse af diskontinuitetslinieteorien (tynd streg) og Brinch Hansens teori (tyk streg)



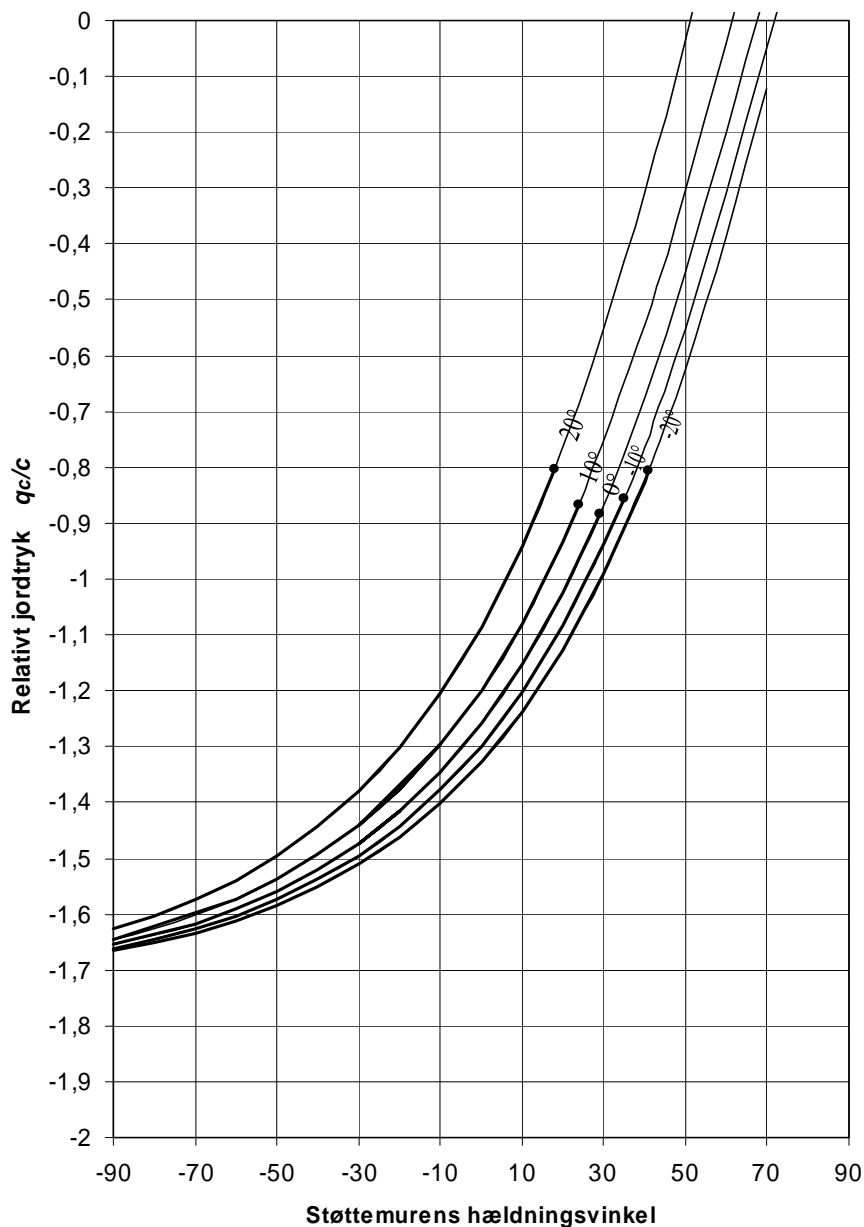
Figur 17.16: Sammenligning af det relative jordtryk  $q_c/c$  på glat støttemur for friktions- og kohæsionsjord,  $\varphi=30^\circ$  og  $p/c=1$ , med variende overfladehældning, som funktion af støttemurens hældningsvinkel med lodret ved anvendelse af diskontinuitetslinieteorien (tynd streg) og Brinch Hansens teori (tyk streg)



Figur 17.17: Sammenligning af det relative jordtryk  $q_p/p$  på ru støttemur for friktionsjord,  $\varphi=30^\circ$ , med variende overfladehældning, som funktion af støttemurens hældningsvinkel med lodret ved anvendelse af diskontinuitetslinieteorien (tynd streg) og Brinch Hansens teori (tyk streg)



Figur 17.18: Sammenligning af det relative jordtryk  $q/p$  på ru støttemur for kohæsionsjord,  $p/c=1$ , med variende overfladehældning, som funktion af støttemurens hældningsvinkel med lodret ved anvendelse af diskontinuitetslinieteorien (tynd streg) og Brinch Hansens teori (tyk streg)

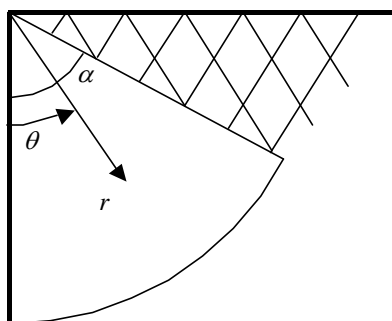


Figur 17.19: Sammenligning af det relative jordtryk  $q_c/c$  på ru støttemur for friktions- og kohæsionsjord,  $\varphi=30^\circ$  og  $p/c=1$ , med variende overfladehældning, som funktion af støttemurens hældningsvinkel med lodret ved anvendelse af diskontinuitetslinieteorien (tynd streg) og Brinch Hansens teori (tyk streg)

## 18 Nedreværdiløsninger som ikke opfylder flydebetingelsen overalt

Da løsningerne for egenvægt, som nævnt i kapitel 15 og 16, ikke er særlig gode især for passivt jordtryk og store friktionsvinkler, skal det i dette afsnit undersøges, om der kan opnås bedre løsninger ved eksakt opfyldelse af ligevægtsbetingelserne og, om nødvendigt, uden at opfylde flydebetingelsen overalt. I det følgende gennemgås derfor en løsningsmodel, som indeholder zoner i hvilke flydning ikke indtræffer. De første beregninger vha. denne model blev foretaget ved et eksamensprojekt, [00.2], under forfatterens ledelse.

Løsningen består af en Rankine zone nær overfladen. Ved vinklen  $\alpha$  går denne zone, se figur 18.1, over i en zone, der opfylder ligevægtsbetingelserne og hvor flydebetingelsen ikke er overskredet. Som vist i afsnit 10.1.6 kan denne zone ikke være en Prandtl zone, da denne ikke giver mulighed for at tilfredsstille ligevægtsbetingelserne i tilfældet med egenvægt. Der vælges derfor en anden sammenhæng mellem spændingerne.



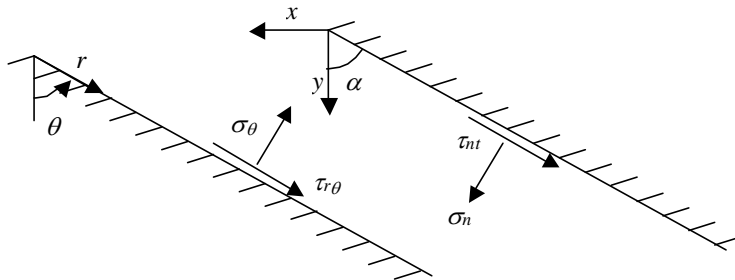
Figur 18.1: Zoneopdeling i tilfældet med vandret jordoverflade og lodret væg.

### 18.1 Vandret jordoverflade, ru væg i friktionsjord

I øverste zone er spændingsfeltet givet ved Rankine løsningen. Der indlægges et koordinatsystem med begyndelsespunkt på jordoverfladen, hvor x-aksen er vandret og y-aksen er lodret, nedadrettet. Herved fås følgende værdier af hovedspændingerne (som ligger i x, y-koordinatsystemet):

$$\sigma_1 = \sigma_y = -\rho g y \quad (18.1)$$

$$\sigma_2 = \sigma_x = -\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \rho g y \quad (18.2)$$



Figur 18.2: Fortegnsregning i overgangssnit

I et snit under vinklen  $\alpha$ , se figur 18.2, kan normal- og forskydningsspændingerne findes vha. transformationsformlerne:

$$\sigma_n = (\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha) = -\rho g \left( \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right) y \quad (18.3)$$

Forskydningsspændingen bliver:

$$\tau_{nt} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin(2\alpha) = -\rho g \frac{\sin(2\alpha) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} y \quad (18.4)$$

I overgangssnittet, se figur 18.2, gælder det at:

$$y = r \cos \alpha, \alpha \in [0; 90^\circ] \quad (18.5)$$

I zonen svarende til vinklen  $\alpha$  benyttes polære koordinater. Denne zone betegnes den polære zone. I polære koordinater ser ligevægtsbetingelserne ud som følger, se (10.10) og (10.11):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \rho g \sin \theta = 0 \quad (18.6)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho g \cos \theta = 0 \quad (18.7)$$

Løsningen forudsætter, at  $\sigma_\theta$  er proportional med  $r$ , og en foreløbig ubekendt funktion af  $\theta$ , dvs.:

$$\sigma_\theta = r f(\theta) \quad (18.8)$$

Endvidere antages det at forskydningsspændingen er proportional med  $\sigma_\theta$  og en proportionalitetskonstant  $\tan \varphi^d$ , dvs.:

$$\tau_{r\theta} = \sigma_\theta \tan \varphi^d = r f(\theta) \tan \varphi^d \quad (18.9)$$

Størrelsen  $\tan \varphi^d$  bestemmes ud fra overgangsbetingelserne ved Rankine zonen. For aktivt jordtryk er  $\tan \varphi^d$  negativ.



Ved indsættelse af (18.8) og (18.9) kan ligevægtsbetingelserne skrives:

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + 3f(\theta)\tan\varphi^d - \rho g \sin\theta = 0 \quad (18.10)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \tan\varphi^d \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r}{r} - f(\theta) + \rho g \cos\theta = 0 \quad (18.11)$$

Funktionen  $f(\theta)$  kan udtrykkes ved  $\tan\varphi^d$  ved løsning af (18.10):

$$f(\theta) = \rho g \frac{-\cos\theta + 3\tan\varphi^d \sin\theta}{9\tan^2\varphi^d + 1} + ke^{-3\theta\tan\varphi^d} \quad (18.12)$$

hvor  $k$  er en konstant, Herved bliver:

$$\sigma_\theta = \rho g r \frac{-\cos\theta + 3\tan\varphi^d \sin\theta}{9\tan^2\varphi^d + 1} + rke^{-3\theta\tan\varphi^d} \quad (18.13)$$

$$\tau_{r\theta} = \tan\varphi^d \left( \rho g r \frac{-\cos\theta + 3\tan\varphi^d \sin\theta}{9\tan^2\varphi^d + 1} + rke^{-3\theta\tan\varphi^d} \right) \quad (18.14)$$

Den radiære spænding findes ved løsning af differentialligningen (18.7). Ved indsættelse af (18.9) fås:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} + \tan\varphi^d \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} - f(\theta) + \rho g \cos\theta = 0 \quad (18.15)$$

hvilket betyder at:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} + A(\theta) = 0 \quad (18.16)$$

hvor

$$A(\theta) = \tan\varphi^d \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} - f(\theta) + \rho g \cos\theta \quad (18.17)$$

Løsningen til den radiære differentialligning giver således:

$$\sigma_r = -\frac{1}{2}A(\theta)r + \frac{c}{r} \quad (18.18)$$

Konstanten  $c$  sættes lig med nul for at få endelige spændinger for  $r=0$ . Konstanten  $c$  må naturligvis ikke forveksles med kohæsionen  $c$ .

Hermed er alle spændingskomponenterne bestemt. Den optimale værdi af vinklen  $\alpha$  bestemmes som den vinkel, der giver det mindste jordtryk under overholdelse af flydebetingelsen.

Såfremt man får at den optimale vinkel  $\alpha$  svarer til et snit udenfor væggen, må man vælge  $\alpha$  svarende til væggens hældning, i dette tilfælde nul. Dette svarer til at hele spændingstilstanden er en Rankineløsning.

Fremgangsmåden ved beregning af en statisk tilladelig løsning kan deles op i følgende trin:

1. trinvis valg af vinkel  $\alpha$ .
2. beregning af proportionalitetskonstanten  $\tan\phi^d$  vha. overgangsbetingelsen mellem Rankinezonen og den polære zone, i et snit under vinklen  $\theta=\alpha$ .
3. bestem konstanten  $k$  således at normalspændingerne på hver side af diskontinuitetslinien under vinklen  $\alpha$  opfylder kontinuitetsbetingelsen.
4. beregn jordtrykket  $q$  på væggen.
5. undersøg om flydebetingelsen er tilfredsstillet. I første beregning sættes  $\phi$  i Rankine zonen lig den givne friktionsvinkel, hvorved flydebetingelsen er tilfredsstillet i Rankine zonen. Hvis flydebetingelsen er overskredet i den polære zone må vinklen  $\alpha$  ændres.
6. optimer med hensyn til  $\alpha$ .

Væggen regnes fuldstændig ru, dvs. med tidligere betegnelser er  $\delta=\phi$ .. Dette betyder at modellen ikke udnytter friktionen mellem væg og jord fuldt ud hvis  $\phi^d < \phi$ . Hvis  $\phi^d > \phi$  er løsningen ubrugelig.

Et eksempel er gennemgået herunder:

Vi antager at friktionsvinklen er  $\phi=30^\circ$ . Spændingerne regnes dimensionsløse ved division med  $\rho g$ .

#### Trinvis valg af vinkel $\alpha$ :

$\alpha$  vælges til  $20^\circ$

#### Beregning af friktionskoefficienten $\tan\phi^d$ :

Formlerne (18.1) til (18.18) giver

$$\sigma_1 = \sigma_x = -x$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = -\frac{x}{3}$$

$$\sigma_\theta = \left( \sin^2 \alpha + \frac{1}{3} \cos^2 \alpha \right) r \cos \alpha = -0,387r$$

$$\tau_{r\theta} = \rho g \frac{\sin(2\alpha) \sin \phi}{1 + \sin \phi} r \cos \alpha = 0,201r$$

Herudfra beregnes  $\tan\phi^d$ :

$$\tan \phi^d = \frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_\theta} = \frac{0,201r}{-0,387r} = -0,52 \quad (-\phi^d = 27,47^\circ)$$

#### Bestem konstanten $k$ :

Ved hjælp af de fundne spændinger fås betingelsen:

$$\sigma_{\theta} = r \frac{-\cos \alpha + 3 \tan \varphi^d \sin \alpha}{9 \tan^2 \varphi^d + 1} + r k e^{-3 \alpha \tan \varphi^d} = -0,428r + 1,72kr$$

der giver:

$$k = 0,0242$$

Beregn jordtrykket  $q$  på væggen.

Det dimensionsløse jordtryk på væggen kan herefter bestemmes som  $\sigma_{\theta}$  for  $\theta=0$ :

$$\frac{q}{\rho g} = -\sigma_{\theta}(r, \theta = 0) = -r \frac{-1}{9 \tan^2 \varphi^d + 1} + rk = 0,266r$$

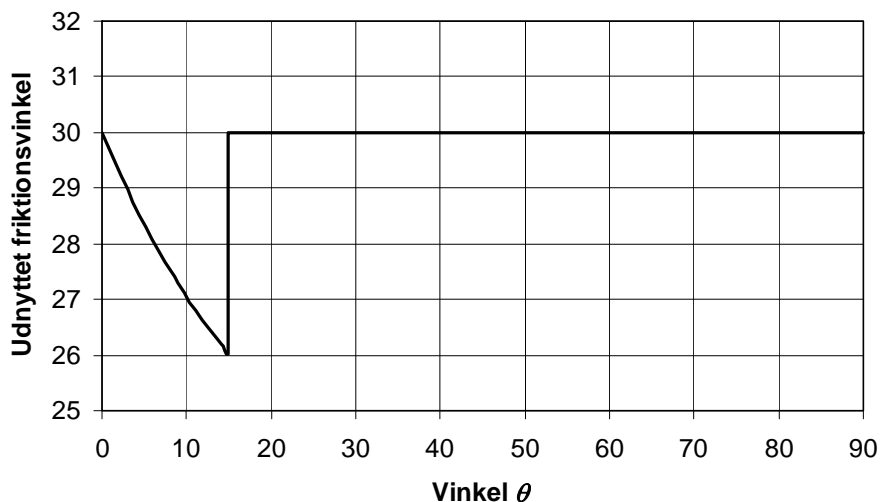
Undersøg flydebetingelsen

Flydebetingelsen må undersøges i alle punkter i den polære zone. Det viser sig, at flydebetingelsen er overskredet, mest ved væggen. Der kræves en friktionsvinkel på  $33^\circ$ , hvis flydebetingelsen ikke må overskrides noget sted.

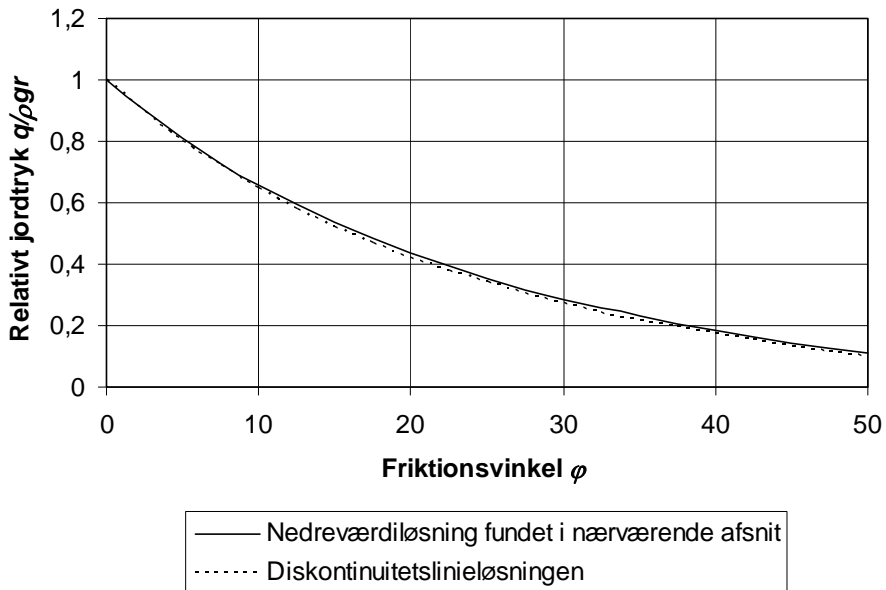
Optimer med hensyn til  $\alpha$

Det viser sig, at hvis  $\alpha$  vælges til  $14,8^\circ$  kan den givne friktionsvinkel på  $30^\circ$  netop udnyttes og flydebetingelsen er ikke overskredet noget sted. Det dimensionsløse jordtryk bliver  $q/\rho g = 0,28r$ , der er større end det, der blev bestemt ovenfor.

I figur 18.3 er den udnyttede friktionsvinkel i hele området vist som funktion af vinklen  $\theta$  for  $\alpha=14,8^\circ$ .



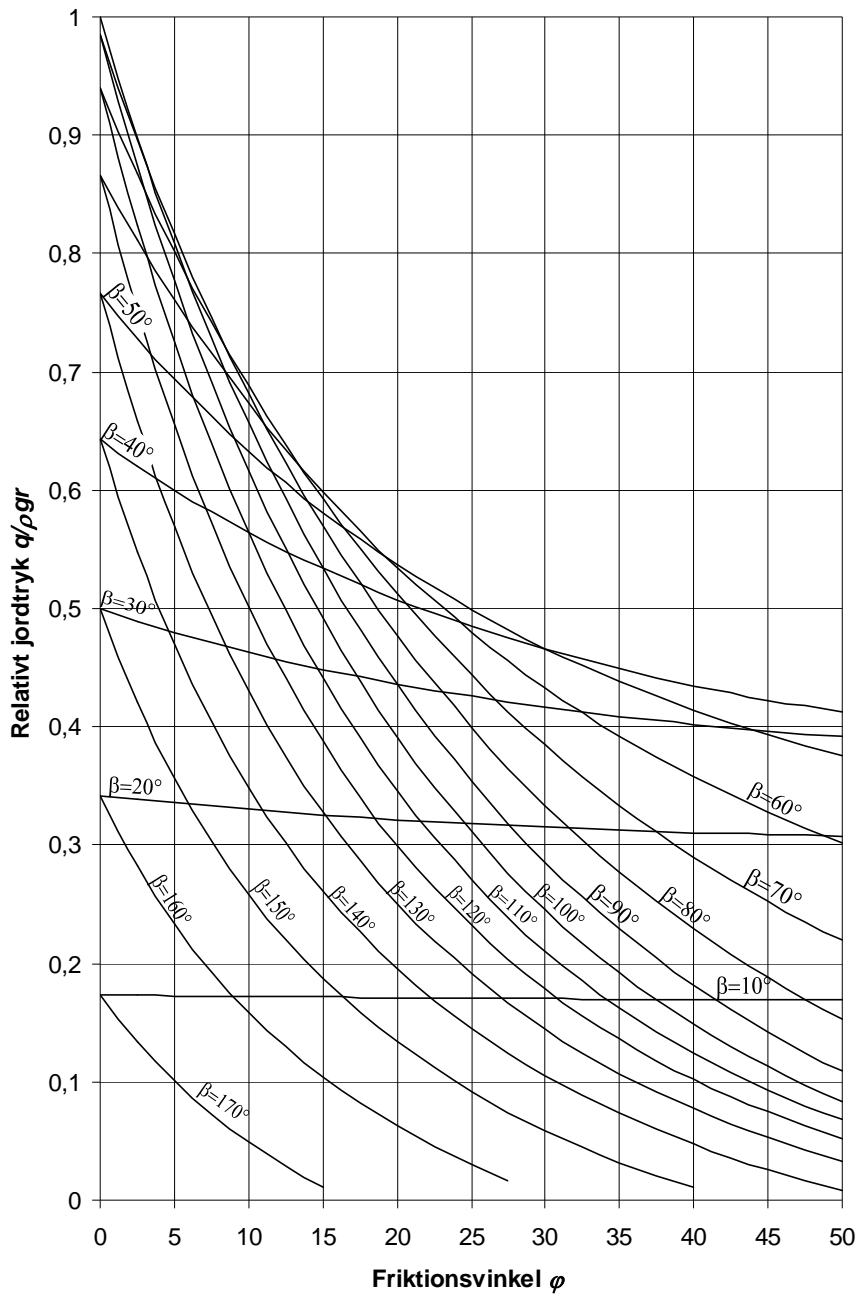
Figur 18.3: Udnyttet friktionsvinkel som funktion af vinklen  $\theta$



Figur 18.4: Relativt jord tryk  $q/\rho g r$  for ru væg som funktion af friktionsvinklen  $\phi$

I figur 18.4 er det relative jordtryk  $q/\rho g r$  for ru væg vist som funktion af friktionsvinklen  $\phi$ . I figuren er jordtrykket også vist for diskontinuitetslinieteorien, hvor løsningen med uendelig mange diskontinuitetslinier er anvendt. Det ses, at der er en glimrende overensstemmelse mellem de to teorier. Det ses dog, at nedreværdiløsningen fra dette afsnit ligger en smule over den anden løsning. Dvs. at der ikke er opnået nogen forbedring af løsningen.

Lignende beregninger kan gennemføres for hældende væg og vandret jordoverflade. Vægghældningen karakteriseres som tidligere ved vinklen  $\beta$ , se f.eks. figur 16.1. I figur 18.5 er vist det relative jordtryk  $q/\rho g r$  som funktion af friktionsvinklen  $\phi$  i tilfældet ru væg. Kurverne er vist for forskellige værdier af  $\beta$ . Denne figur skal sammenlignes med figur 16.2. Det ses, at der heller ikke her er tale om nogen forbedring af diskontinuitetslinieløsningen.



Figur 18.5: Det relative jordtryk  $q/\rho g r$  på ru støttemur for friktionsjord som funktion af friktionssvinklen  $\varphi$  ved anvendelse af løsning fra nærværende afsnit 18.1

## 18.2 Vandret jordoverflade, glat væg i friktionsjord

Der antages stadig, at væggen er lodret og at overfladen er vandret samt at spændingsfordelingen i den øverste zone er givet ved Rankineløsningen. Vi har derfor stadig spændingsfordelingen (18.3) og (18.4):

$$\sigma_n = (\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha) = -\rho g \left( \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right) y \quad (18.19)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin(2\alpha) = -\rho g \frac{\sin(2\alpha) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} y \quad (18.20)$$

I den polære zone sætter vi nu forsøgsvis:

$$\sigma_\theta = r f(\theta) \quad (18.21)$$

$$\tau_{r\theta} = k \left( \theta - \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \right) \quad (18.22)$$

hvor  $k$  er en konstant. Det ses, at når vinklen  $\theta$  er nul, er forskydningsspændingen også nul, hvilket betyder at randbetingelsen for glat væg er opfyldt.

Indsættes (18.21) og (18.22) i den første ligevægtsligning (18.6) fås:

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + 3k \left( \theta - \frac{\pi}{2} + \beta \right) - \rho g \sin \theta = 0 \quad (18.23)$$

Løsningen til denne differentialligning er:

$$f(\theta) = -\frac{3}{2}k\theta^2 + \frac{3}{2}k\pi\theta - 3k\beta\theta - \rho g \cos \theta + C \quad (18.24)$$

hvor  $C$  er en konstant.

Den anden differentialligning (18.7) giver ved indsættelse af (18.21), (18.22):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + k + \frac{\sigma_r - r f(\theta)}{r} + \rho g \cos \theta = 0 \quad (18.25)$$

Indsættes endvidere (18.24) giver dette følgende løsning af den radiære spænding:

$$\sigma_r = -\rho g r \cos \theta - \frac{3}{4}rk\theta^2 + \frac{3}{4}rk\pi\theta - \frac{3}{2}rk\beta\theta - \frac{1}{2}rk + \frac{1}{2}rC \quad (18.26)$$

Ved udførelse af beregningerne er de første to trin de samme som i afsnit 18.1. De næste trin er:

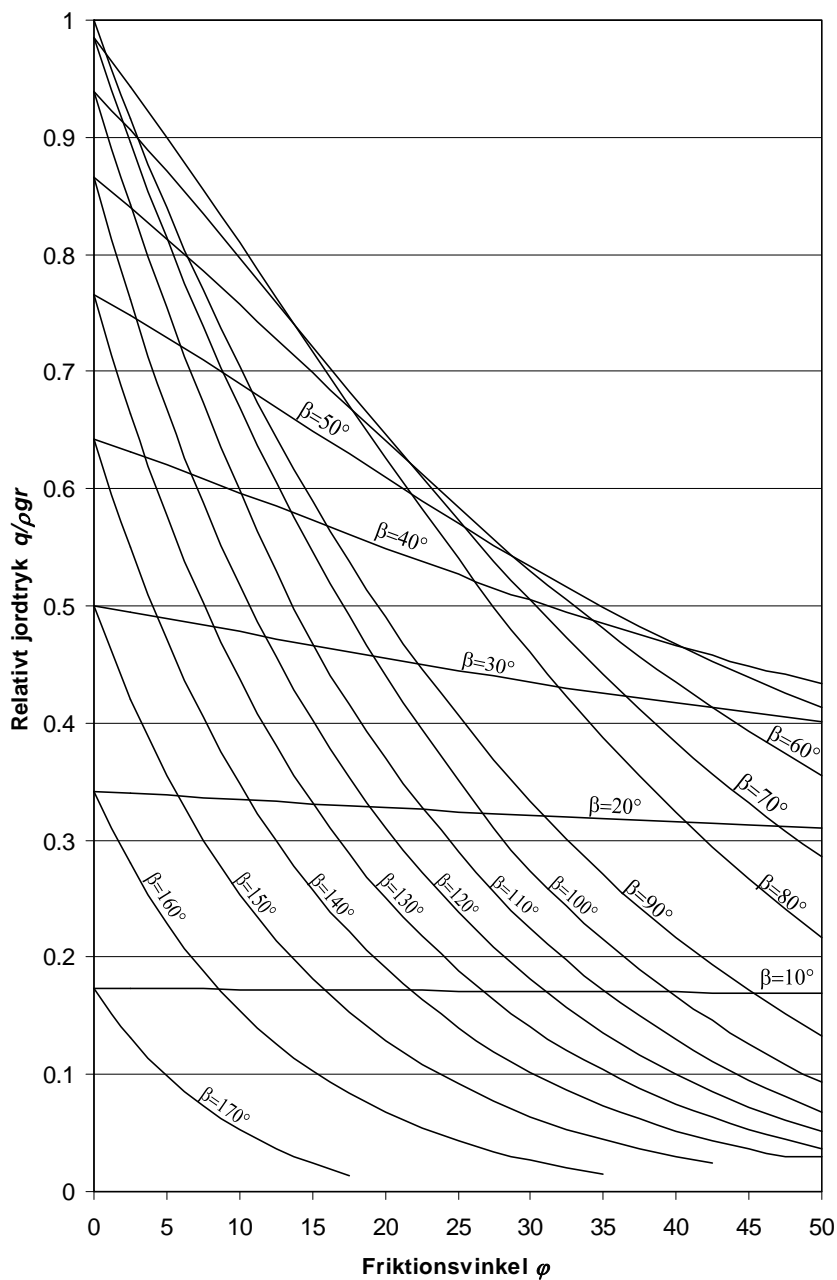
3. bestem konstanten  $C$ , således at kontinuitetsbetingelsen for normalspændingerne på hver side af diskontinuitetslinien under vinklen  $\alpha$  er opfyldt.
4. beregn jordtrykket  $q$  på væggen.
5. undersøg om flydebetingelsen er tilfredsstillet.
6. optimer med hensyn til  $\alpha$ .

Løsningen for en glat, lodret væg med vandret jordoverflade er trivial, idet at man for vinklen  $\alpha=0$ , vil få løsningen for en Rankine zone. Dvs. at jordtrykket vil være, se afsnit 11.2.1:

$$q = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \rho g r \quad (18.27)$$

I figur 18.6 er vist det relative jordtryk som funktion af friktionsvinklen for forskellige værdier af  $\beta$ .

Løsningen skal sammenlignes med figur 16.3. Det ses, at den er væsentligt dårligere end diskontinuitetslinieløsningen. Særligt for vinkler  $\beta < 90^\circ$  er løsningerne ikke gode, bemærk især det store gab der er mellem kurverne for  $\beta=90^\circ$  og for  $\beta=80^\circ$ .



Figur 18.6: Det relative jordtryk  $q/\rho g r$  på glat støttemur for friktionsjord som funktion af friktionssvinklen  $\phi$  ved anvendelse af løsning fra nærværende afsnit 18.2



# 19 Konklusion

I denne afhandling behandles beregningsmetoder for jordtryk på støttemurskonstruktioner i brudstadiet. Vægten i afhandlingen er lagt på udvikling af nedreværdiløsninger under forudsætning af, at jordens styrke er beskrevet ved Coulombs flydebetingelse. Der er udviklet to metoder, en diskontinuitetslinieteori, samt en nedreværdiløsning, der baserer sig på tilladelige spændingstilstande, som ikke overalt udnytter flydebetingelsen.

For diskontinuitetslinieteorien er løsningerne delt op i to tilfælde, jordtryk under hensyntagen til egenvægt og jordtryk uden hensyntagen til egenvægten.

I tilfældet uden hensyntagen til egenvægt har teorien den fordel at dens gyldighedsområde er større end den i afhandlingen omtalte gængse teori. For glatte vægge kan alle tilfælde beregnes, for ru vægge kræver teorien, at der eksisterer en diskontinuitetslinie indenfor afgrænsningen af jordoverflade og støttemur. Sammenligninger med den gængse teori viser overensstemmelse mellem de to teorier ved grænsen for den gængse teoris gyldighed. Jo længere man bevæger sig væk fra dette tilfælde desto større bliver afvigelserne, når der kun benyttes én diskontinuitetslinie. Indføres flere diskontinuitetslinier bliver afvigelsen mindre, og i tilfældet af uendelig mange diskontinuitetslinier vil de to teorier give samme resultater.

Tilfældet med hensyntagen til egenvægt er vanskeligere, idet den såkaldte Rankine zone benyttet i diskontinuitetslinieteorien kun med specielle randbetingelser kan give løsninger til jordtrykket.

Tilfældet med egenvægt skal derfor løses med lidt andre metoder. I denne afhandling findes løsningen ved at opdele jordtrykket i flere lag. Egenvægten for hvert lag virker derved som en jævnt fordelt last på det nedenstående lag. Et jordtryk kan derved findes ved superposition af jordtryk fra alle lag i jorden. For tilfældet glat væg er der god overensstemmelse med den gængse teori. For ru vægge benyttes i den gængse teori en tilnærmelsesformel udviklet af Brinch Hansen. Denne løsning kan ikke reproducere af diskontinuitetslinieløsningen anvendt på lagvis summation. Særligt for passivt jordtryk bliver der ret stor uoverensstemmelse med den gængse teori. Diskontinuitetsløsningen med lagvis summation er dog stadig en gyldig nedreværdi, dvs. på den sikre side.

Både diskontinuitetslinieteorien og den gængse teori forudsætter, at der er brud i jorden overalt. Dette er ikke et nødvendigt krav for en nedreværdi. Der er derfor fundet løsninger, som ikke har stillet dette krav. Ved udformning af disse løsninger tages der udgangspunkt i ligevægtsligningerne. Der forudsættes visse sammenhænge mellem spændingerne i jorden, og ud fra disse er der fundet løsninger, som indenfor visse grænser giver spændinger indenfor flydefladen.

Teorien, der baserer sig på zoner, der opfylder ligevægtsbetingelserne, men ikke overalt udnytter materialet til brud, har den ulempe, at beregningerne skal optimeres iterativt for at give tilfredsstillende resultater.

Eksemplerne i denne afhandling synes at indikere, at nedreværdiløsninger, der ikke udnytter materialet til brud overalt, ikke har nogle fordele i sammenligning med diskontinuitetslinieløsningen med lagvis summation.

## 20 Litteraturliste

- [52.1] *Shield, R. T.*: **Stresses and velocity fields in soil mechanics**. Technical Report No.81 Graduate Div.Appl.Mathematics, Brown University, Dec. 1952.
- [53,1] *Brinch Hansen, Jørgen*: **Earth pressure calculation**. The Danish Technical Press, The Institution of Danish Civil Engineers, Copenhagen 1953.
- [53.2] *Shield, R. T., Drucker, D. C.*: **The application of limit analysis to punch-indentation problems**. Journ. of Appl. Mech., vol. 20, 1953, pp. 453-460.
- [53.3] *Shield, R. T.*: **Mixed boundary value problems in soil mechanics**. Quarterly of applied Mathematics, vol.11, No.1, 1953, pp. 61-75.
- [54.1] *Shield, R. T.*: **Plastic potential theory and Prandtl bearing capacity solution**. Journ. of Appl. Mech., vol. 21, 1954, pp. 193-194.
- [54.2] *Shield, R. T.*: **Stress and velocity fields in soil mechanics**, J.Math.Phys., vol. 33, No.2, 1954, pp. 144-156.
- [55.1] *Shield, R. T.*: **The plastic indentation of a layer by a flat punch**. Quarterly of Appl. Math., vol. 13, 1955, pp. 27-46.
- [55.2] *Shield, R. T.*: **On Coulombs law of failure in soils**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 4, 1955, pp. 10-16.
- [65.1] *Sokolovskii, V.V.*: **Statics of granular media**. Pergamon Press, 1965.
- [65.2] *Lundgren, H., Brinch Hansen, J.*: **Geoteknik**. Teknisk Forlag, København, 1965.
- [65.3] *Hansen, Bent.*: **A theory of plasticity – For ideal frictionsless materials**. Doktorafhandling, Teknisk Forlag, Copenhagen 1965.
- [75.1] *Chen, Wai-Fah*: **Limit analysis and soil plasticity**. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam 1975.
- [78.1] *Hansen, Bent*: **Geoteknik og fundering, del 1**, Laboratoriet for fundering, Danmarks Tekniske Højskole, 1978.
- [78.2] *Hansen, Bent*: **Geoteknik og fundering, del 2**. Laboratoriet for fundering, Danmarks Tekniske Højskole, 1978.
- [78.3] *Atkinson, J. H, Bransby, P. L.*: **The mechanics of soils**. McGraw-Hill, London, 1978.

- [80.1] *Harremoës, Krebs Ovesen, Moust Jacobsen: Lærebog i geoteknik, del 2.* 4.udgave. Polyteknisk Forlag, Lyngby 1980.
- [80.2] *Steenfelt, J. S.: Formelsamling for kursus 5811–geoteknik 1, kursus 5821–geoteknik 2.* Laboratoriet for Fundering, Danmarks Tekniske Højskole, 1980.
- [84.1] *Harremoës, Krebs Ovesen, Moust Jacobsen: Lærebog i geoteknik, del 1.* 5.udgave. Polyteknisk Forlag, Lyngby 1984.
- [90.1] *Salencon, J.: An introduction to the yield design theory and its applications to soil mechanics,* European Journal of Mechanics, A/Solids, vol.9, No.5, 1990, pp. 477-500..
- [90.2] Hvam, Tage.: **Markundersøgelsesmetoder - mekaniske,** dfg-Bulletin 5, Dansk Geoteknisk Forening, 1990.
- [91.1] *Nielsen, M. P., Pilegaard Hansen, L., Rathkjen A.: Mekanik 2.2, del 1.* Instituttet for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter, 1991.
- [91.2] *Muir Wood, D. M.: Soil behavior and critical state soil mechanics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [93.1] *Atkinson, John: The mechanics of soils foundations.* McGraw-Hill, 1993.
- [00.1] *Nielsen, M. P., Pilegaard Hansen, L., Rathkjen A.: Mekanik 2.2, del 2.* Institut for Bærende Konstruktioner og Materialer, Aalborg/København 2000.
- [00.2] *Said, Manhal J.: Jord/Konstruktionsinteraktion, Plasticitetsteori.* Eksamensprojekt, Inst.Bær.Konstr. Mat. i samarbejde med Inst.Geol.Geot., DTU, Juni 2000.
- [01.1] *Hansen, Bent.: Advanced theoretical soil mechanics.* Dansk Geoteknisk forening, dfg-Bulletin 20, 2001.
- [03.1] *Randolph, M.F., Puzrin, A.M.: Upper bound limit analysis of circular foundations on clay under general loading,* Geotechnique, vol.53, No. 9, 2003, pp. 785-796.
- [07.1] *Krebs Ovesen, Fuglsang, Bagge (red.): Lærebog i geoteknik.* Polyteknisk Forlag, Lyngby 2007.



Report no. R-174  
ISSN 1601-2917  
ISBN 978-87-7877-249-7